EINFÜHRUNG IN DIE DYNAMIK VON STERNSYSTEMEN

VON

PROF. DR. E. VON DER PAHLEN



1947

VERLAG BIRKHÄUSER

BASEL

Druck: Buchdruckerei Lienberger AG. Zürich 1
Printed in Switzerland

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT

Die von C. V. L. Charlier, K. Schwarzschild und J. H. Jeans vor etwa zwei Jahrzehnten begründete Dynamik von Sternsystemen hat in dieser verhältnismässig kurzen Zeit eine so grosse Bedeutung erlangt und nimmt heute im Rahmen des astronomischen Unterrichts an den Hochschulen eine so hervorragende Stellung ein, dass eine ausführliche Rechtfertigung für das Erscheinen der vorliegenden «Einführung» in diese neue Disziplin wohl als überflüssig betrachtet werden darf. Das Fehlen eines kurzen, auch den Bedürfnissen der Studierenden Rechnung tragenden Leitfadens der Stellardynamik ist sicher schon oft von zahlreichen Dozenten empfunden worden. In ganz besonderem Masse gilt dies für das deutsche Sprachgebiet, auf dem, so weit mir bekannt, die einzigen zusammenfassenden Darstellungen dieses Fragenkomplexes in dem 1933 im Handbuch der Astrophysik (Bd.V, 2) erschienenen Aufsatze von B. Lindblad «Die Milchstraße», und im letzten Kapitel meines 1937 erschienenen «Lehrbuchs der Stellarstatistik» enthalten sind, die beide wegen der gerade auf diesem Gebiete erzielten grossen Fortschritte, heute natürlich ergänzungsbedürftig sind, und schon wegen des großen Umfanges der genannten, in erster Linie ganz andere Ziele verfolgenden Werke, immer nur einem verhältnismäßig beschränkten Leserkreis zugänglich geblieben sind. Ich bin daher der Aufforderung des Verlags Birkhäuser in Basel, für die bei ihm erscheinende Sammlung wissenschaftlicher Monographien eine «Einführung in die Dynamik von Sternsystemen» zu schreiben, gern nachgekommen und hoffe mit ihr einen Beitrag zur Erleichterung der Erlangung der heute für jeden Astronomen wichtigen Kenntnisse auf diesem Gebiete geleistet zu haben. Ich hoffe ferner, daß die Benutzung dieses Buches auch den Vertretern benachbarter Fachgebiete, also in erster Linie den Mathematikern und theoretischen Physikern, die einen Einblick in die, auch für sie interessanten, hier behandelten dynamischen Probleme gewinnen wollen, die Erreichung dieses Zieles in nicht unwillkommener Weise erleichtern wird.

Dem Charakter einer Einleitung entsprechend, beabsichtigt dieses Buch keineswegs eine erschöpfende Darstellung aller auf dem von ihm behandelten Gebiete eingeschlagenen Forschungsrichtungen zu geben, sondern nur diejenigen, welche bereits zu gesicherten Ergebnissen geführt haben, in ihren Grundzügen zu skizzieren. Dafür sind die Grundlagen der Theorie in etwas größerer Ausführlichkeit dargestellt als es der fortgeschrittene Leser möglicherweise für nötig erachten würde, weil die Erfahrung gezeigt hat, daß gerade das Bestehen von Unklarheiten in bezug auf die der Theorie

zu Grunde liegenden mathematischen Begriffe und Methoden für das Verständnis ihrer komplizierteren Anwendungen das größte Hindernis bildet.

Diese Monographie ist im letzten Kriegsjahr entstanden, also zu einer Zeit, da die ausländische Literatur auch in der Schweiz nur unter großen Schwierigkeiten und meistens nur in Auszügen erhältlich war. Zu um so größerem Danke fühle ich mich den Herren Professoren W. Brunner, S. Mauderli und M. Waldmeier verpflichtet, die mir in überaus freundlicher Weise die Benutzung der Bibliotheken ihrer Institute gestattet haben und es mir durch Zusendung aller eintreffenden Neuerscheinungen und orientierenden Berichte (Astronomical News Letters &c) ermöglicht haben, auch in der ländlichen Abgeschlossenheit von Davos, soweit es die Zeit überhaupt erlaubte, in wissenschaftlichen Fragen auf dem Laufenden zu bleiben.

Eine nachträgliche Durchsicht der inzwischen eingegangenen astronomischen Literatur hat gezeigt, daß trotz der erwähnten Schwierigkeiten, keine für den in diesem Buche behandelten Gegenstand wichtige Arbeit übersehen worden ist. Ein dem gleichen Thema gewidmetes Buch von S. Chandrasekhar, «Principles of Stellar Dynamics», das bereits 1942 erschienen war, ist mir erst im Frühjahr 1946 zugänglich geworden. Natürlich berühren sich beide Bücher in sehr vielen Punkten, doch glaube ich, daß auch die Unterschiede in der Behandlung verschiedener Fragen groß genug sind, um das unabhängige Bestehen beider Werke nebeneinander zu rechtfertigen. So lehnt sich z. B. bei mir die Darstellung der Berechnung der Relaxationszeit eines Sternsystems an die Vorbilder von Schwarzschild, W. Fricke, O. Heckmann und H. Siedentopf an, während S. Chandrasekhar dem Charlier-Russellschen Verfahren den Vorzug gibt. Des weiteren habe ich bei der Behandlung der Integration der Grundgleichung der Stellardynamik und der Integrale des dieser Gleichung zugeordneten Differentialgleichungssystems, die als Argumente der Verteilungsfunktion in Frage kommen, den sehr anschaulichen Überlegungen von H. Poincaré aus didaktischen Gründen einen viel breiteren Raum gegeben als es üblicherweise bei der Darstellung dieser Fragen zu geschehen pflegt, und aus denselben Gründen auch der Behandlung des allgemeinen differentiellen Strömungsfeldes durch E. A. Milne eine ausführliche Darstellung gewidmet. Schließlich enthält die vorliegende Monographie bei der Behandlung der Arbeiten von S. Chandrasekhar selbst über nichtstationäre Sternsysteme gewisse Ergänzungen, die zur Zeit des Erscheinens seines Besuches noch nicht bekannt waren und erst 1943 von M. Schuerer in den Astronomischen Nachrichten (Bd. 273, Heft 5—6) veröffentlicht worden sind. Auch die ganze Darstellungsweise meines Buches schließt sich enger an die in deutschen mathematischen und astronomischen Lehrbüchern

gebräuchliche an und dürfte aus diesem Grunde dem deutschsprachigen Studierenden leichter verständlich sein, wenn er aus dem Studium der glänzenden von S. CHANDRASEKHAR gegebenen Darstellung natürlich auch den größten Nutzen ziehen würde.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. M. SCHUERER, Bern, der gelegentlich eines Ferienaufenthaltes in Davos im Januar 1945 die Freundlichkeit hatte, den damals vorhandenen Teil meines Manuskriptes durchzulesen, für manche anregende Diskussion über Fragen der Stellardynamik, Herrn Dr. J. O. FLECKENSTEIN für seine wertvolle Hilfe beim Lesen der Korrekturen, sowie dem Verlage A. Birkhäuser für sein stetes Entgegenkommen gegenüber allen meinen Wünschen an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Davos-Wolfgang, im August 1946 E. v. d. PAHLEN

EINLEITUNG

Die Anwendung dynamischer Prinzipien auf die astronomischen Erscheinungen kann auf eine lange und erfolgreiche Vorgeschichte zurückblicken. Schon die Aufstellung der drei Grundgesetze der Mechanik durch NEWTON fiel zeitlich sehr eng mit seiner Entdeckung des Gravitationsgesetzes zusammen und führte sofort zur vollständigen Erklärung der bereits von KEPLER gefundenen kinematischen Gesetze der Bewegung der Planeten um die Sonne, d. h. zur Lösung des Zweikörperproblems, dieses Schlüssels zur Beherrschung der Erscheinungen im Planetensystem. Allerdings erwies sich schon der nächste Schritt, nämlich die Zusammenfassung der Bewegungsverhältnisse dreier sich nach dem NEWTONschen Gesetze anziehender Körper (das Dreikörperproblem) in einer geschlossenen, für die Berechnung bequemen und übersichtlichen Form, als nicht ausführbar; jedoch stellte dieser Umstand für den Ausbau der Theorie des Planetensystems insofern kein unüberwindliches Hindernis dar, weil die gegenseitige Beeinflussung der Planeten, wegen ihrer im Vergleiche zu der Sonne ganz unbedeutenden Massen, als ein Effekt zweiter Ordnung — als «Störungen» der durch die Theorie des Zweikörperproblems dargestellten Verhältnisse — betrachtet und behandelt werden durfte. Das XVIII. und das XIX. Jahrhundert waren denn auch ausschließlich mit der Entwicklung und immer weiter getriebenen Verfeinerung der Theorie dieses einzigen, mit Hilfe der damals zur Verfügung stehenden praktischen und theoretischen Mittel der Erforschung zugänglichen astronomischen Systems beschäftigt, die denn auch, abgesehen von ganz wenigen, nur auf der Grundlage einer vertieften, relativistischen Mechanik verständlicher Erscheinungen, zu einer vollständigen und eindrucksvollen Übereinstimmung mit allen Ergebnissen der Erfahrung führte.

Inzwischen hatte sich aber der astronomische Horizont, dank dem ununterbrochenen Fortschritte in den Beobachtungsmitteln, in ungeahnter Weise erweitert, sodaß das Planetensystem, das den Astronomen anfänglich schlechthin als das «Weltsystem» erschienen war, allmählich zu einem kosmisch ziemlich bedeutungslosen Anhängsel eines einzelnen, in keiner Weise besonders ausgezeichneten Sternes herabgesunken war. Statt seiner traten nun aber andere, diesmal aus Sternen bestehende Systeme in den Mittelpunkt des Interesses, so die an verschiedenen Stellen des Himmels sichtbaren, als «Sternhaufen» bezeichneten Sternanhäufungen, ferner die anfänglich noch völlig rätselhaften «Spiralnebel» und vor allem das unseren ganzen Himmel umgürtende Band der Milchstraße, in dem schon recht früh dasjenige «Stern-

system» erkannt wurde, zu dem auch unsere Sonne als einzelner Stern gehört. Solange sich die Erforschung dieser Systeme auf die Untersuchung ihrer äußeren Gestalt beschränken mußte, war ein wesentlicher Fortschritt in der Ermittlung ihrer Beschaffenheit und Struktur allerdings nicht zu erwarten, und es war daher erst unserem Zeitalter vorbehalten, gestützt auf das inzwischen gewaltig angewachsene Material an *Eigenbewegungen* und mit Hilfe der neuen spektroskopischen Methoden gewonnenen *Radialgeschwindigkeiten* zahlreicher Sterne, das Problem des Aufbaus und der Entwicklung ganzer Sternsysteme nach erfolgversprechenden Methoden anzugreifen und einer Lösung entgegenzuführen. Hand in Hand mit der praktischen Untersuchung dieser Gebilde ging auch die theoretische Forschung, die sich über die in ihnen herrschenden dynamischen Verhältnisse und deren zeitliche Änderung einen Begriff zu machen versuchte. Dieser Zweig der theoretischen Astronomie stellt somit einen der allerjüngsten Triebe auf dem uralten Baume dieser Wissenschaft dar, und es ist daher nicht unwichtig, bevor wir zu der hier beabsichtigten Schilderung seines gegenwärtigen, noch lange nicht abgeschlossenen Standes übergehen, uns von den charakteristischen Merkmalen dieser neuen mechanischen Disziplin und den tiefgehenden Unterschieden, die sie von ihrer Vorgängerin, der klassischen Himmelsmechanik oder Mechanik des Planetensystems, trennen, Rechenschaft abzulegen.

Selbstverständlich ist das Hauptziel beider Disziplinen im wesentlichen das gleiche: es besteht in der Ermittlung der gegenseitigen Lagen der einzelnen Bestandteile der zu untersuchenden Systeme sowie ihrer Geschwindigkeiten in bezug auf einander, aus denen dann, insofern sich über die in Frage kommenden Massen etwas Bestimmtes aussagen läßt, auf Grund der Prinzipien der analytischen Mechanik und des Gravitationsgesetzes (wobei in beiden Fällen von der klassischen Theorie ohne Berücksichtigung ihrer relativistischen Verallgemeinerung Gebrauch gemacht werden kann) diese Bewegungen erklärt und, soweit möglich, die zeitlich aufeinanderfolgenden Konfigurationen des Systems sowohl in der Vergangenheit als für die Zukunft ermittelt werden. Der wesentliche Unterschied besteht aber darin, daß wir es beim Planetensystem mit einer verhältnismäßig kleinen Anzahl von Körpern zu tun haben, deren individuelle Schicksale für uns ein Interesse besitzen und deren individuelle Bewegungen wir auch tatsächlich verfolgen können, weil letztere, wie bereits oben erwähnt, wegen der alles beherrschenden Anziehung des Zentralkörpers (der Sonne), in weitgehender Annäherung durch die Theorie des Zweikörperproblems darstellbar sind. Im Gegensatz hierzu stellt ein Sternsystem eine Ansammlung von gravitierenden Körpern annähernd gleicher oder zum mindesten durchaus vergleichbarer Massen dar, die im allgemeinen äußerst komplizierte Bahnen um einander beschreiben wer-

den, deren Vorausberechnung gänzlich außerhalb der Grenzen des praktisch Durchführbaren liegen würde, auch wenn sich die Bewegungsgesetze, was ja nicht der Fall ist, in einfache mathematische Formeln fassen ließen. Eine solche Lösung würde aber, auch wenn sie möglich wäre, unser Interesse an dem Problem in keiner Weise befriedigen; um aus ihr das herauszulesen, was wir in Wirklichkeit über ein Sternsystem erfahren wollen, müßten wir von der Betrachtung der individuellen Sterne absehen, sie nach irgendwelchen Merkmalen in Gruppen zusammenfassen und nach irgendwelchen sinnvollen Beziehungen zwischen den diesen Gruppen zukommenden Eigenschaften suchen – mit anderen Worten, wir würden *Statistik* treiben müssen. Gerade dieser Umstand aber verwandelt das scheinbar unlösbare Problem der Mechanik eines Sternsystems in ein lösbares; denn wir können statt die Bewegungen aller einzelnen Sterne zu ermitteln und nachher die Statistik ihrer Eigenschaften vorzunehmen, gleich darauf hinausgehen, die dynamischen Gesetze der Masseneigenschaften aufzustellen, die uns sofort die Antwort auf die wirklich wesentlichen Fragen liefern. In diesem Sinne kann gesagt werden, daß wir beim Studium von Sternsystemen «Statistische Mechanik» treiben müssen, wenn auch dieser Ausdruck für gewöhnlich nicht in dem hier gemeinten, sondern hauptsächlich in dem ihm von GIBBS gegebenen, von der Thermodynamik her bekannten Sinne gebraucht zu werden pflegt. Durch diese veränderte Fragestellung tritt der einzelne Stern aus dem Gesichtskreise unserer Betrachtungen heraus, und nur die *Anzahlen* von Sternen, welche gewisse gemeinsame Merkmale besitzen, behalten für uns ein Interesse. Diese Anzahlen werden aber bekanntlich durch sog. *«Verteilungsfunktionen»* gegeben, die den eigentlichen Gegenstand aller statistischen Untersuchungen bilden und als Argumente die in Frage kommenden Merkmale haben. Die in unserem Falle zu benutzenden Merkmale müssen natürlich die dynamisch wichtigen Eigenschaften der Sterne erfassen. Diese sind: erstens ihre Massen und gegenseitigen räumlichen Lagen, von denen die von ihnen ausgehenden Gravitationswirkungen abhängen, zweitens ihre Geschwindigkeiten. Da die Massen der Sterne, statistisch betrachtet, in verhältnismäßig engen Grenzen eingeschlossen zu sein scheinen, kann bei genäherten Betrachtungen eine Einteilung des Sternmaterials nach Massenklassen, die auf Grund unseres heutigen Wissens meistens noch schwer durchführbar ist, unterbleiben, indem die Massen aller Sterne als untereinander gleich vorausgesetzt werden.

Wenn nun die Stellardynamik eine statistische Disziplin ist, in der wir es nicht mit individuellen Sternen, sondern immer nur mit den Anzahlen individuell nicht näher bestimmmter, weitgehend gleichartiger Objekte, die in ihrer Gesamtheit die von uns als «Sternsystem» bezeichnete Mannigfaltigkeit ausmachen, zu tun haben, dann drängt sich uns unwillkürlich die Analo-

gie auf, die zwischen der Theorie der Sternsysteme und der kinetischen Theorie der Gase bestehen muß. In der Tat ist diese Ähnlichkeit beider Probleme schon früh bemerkt und hervorgehoben worden. Schon Lord KELVIN verglich ein Sternsystem, und namentlich das System unserer Milchstraße, mit einer Gasmasse, in der die einzelnen Sterne die Rolle der Gasmoleküle spielen, jedoch waren die Kenntnisse, die den Astronomen über die räumliche Dichte, mit der die Sterne in diesem System verteilt sind sowie über ihre Geschwindigkeiten zur Verfügung standen, lange noch viel zu mangelhaft, als daß mit diesem Gedanken hätte Ernst gemacht werden können. Daß sich viele aus der Theorie der Gase geläufige Begriffe nicht ohne weiteres auch auf Sternsysteme übertragen ließen, war allerdings von vornherein klar. Wenn wir nun im folgenden die Theorie der Sternsysteme, dem Beispiele der auf diesem Gebiete in den letzten Jahrzehnten bahnbrechenden Forscher folgend, als Theorie eines «Sterngases» aufbauen wollen, dann muß in erster Linie unsere Aufgabe darin bestehen, durch eine sorgfältige Untersuchung festzustellen, worin sich ein solches Sterngas von einem gewöhnlichen irdischen Gase unterscheidet und in welchen Punkten sich seine Theorie von der herkömmlichen Gastheorie entfernen wird. Dieser Frage wird der erste Abschnitt der vorliegenden Darstellung gewidmet sein, der somit einen vorbereitenden Charakter tragen wird; ihm folgt dann ein Abschnitt, in dem die Grundlagen der Dynamik von Sternsystemen in ganz allgemeiner, abstrakter Form entwickelt werden und zwei weitere Abschnitte, die die Erweiterung dieser Theorie und ihre Anwendung auf konkrete Sternsysteme behandeln, nämlich erstens auf unser «Galaktisches System» und dann auf einige Typen der in letzter Zeit näher bekannt gewordenen «Außergalaktischen Systeme», wobei auch die allerneuesten Untersuchungen über die Dynamik der sog. Spiralnebel, soweit dies heutzutage im Rahmen einer «Einführung» schon möglich ist, Berücksichtigung finden sollen.

I. Teil

ALLGEMEINE THEORIE

I. KAPITEL

DAS STERNGAS

Bei der Erklärung der an irdischen Gasen beobachtbaren Erscheinungen spielt die Betrachtung der Wirkungen, die von den zwischen einzelnen Gasmolekeln außerordentlich häufig stattfindenden Zusammenstößen ausgehen, bekanntlich eine sehr große Rolle. Dabei wird unter einem Zusammenstoße eine solche Annäherung zweier Gasmolekeln aneinander verstanden, bei der gewisse, in größeren Entfernungen nicht wirkende Kräfte besonderer Art, die man als Molekularkräfte zu bezeichnen pflegt, in Erscheinung treten und die Geschwindigkeiten der beiden zusammenstoßenden Teilchen sowohl ihrer Größe als auch ihrer Richtung nach verändern. Dagegen werden die zwischen diesen winzigen Körperchen, wie zwischen allen materiellen Partikeln wirkenden Gravitationskräfte, wegen ihrer verschwindenden Kleinheit nicht in Erwägung gezogen und ein Gravitationspotential nur in den Fällen zur Erklärung des dynamischen Verhaltens einer Gasmasse herangezogen, wenn letztere die Größenordnung eines Weltkörpers (z. B. der Sonne) erreicht oder sich das betrachtete Gas an der Oberfläche eines solchen, also in einem «äußeren», nicht von ihm selbst herrührenden Gravitationsfelde befindet, wie das z. B. für die Erdatmosphäre der Fall ist. Wenn wir uns nun in diesem Kapitel der Betrachtung eines «Sterngases», also einer isoliert im Raume schwebenden Ansammlung von Sternen, wie sie uns in unserem Galaktischen System und in anderen Sternsystemen entgegentreten, zuwenden, so müssen wir natürlich in erster Linie die Frage erörtern, inwiefern die Berücksichtigung oder Vernachlässigung der beiden oben erwähnten Faktoren unter den hier vorliegenden Verhältnissen berechtigt erscheint. Wie wir gleich sehen werden, unterscheidet sich ein «Sterngas» in wesentlichen Beziehungen von einem «gewöhnlichen» Gase, wenn auch seine Theorie weitgehende Analogien zu der klassischen Gastheorie aufweisen wird.

Zusammenstöße und Begegnungen

Nehmen wir zuerst die Frage nach der Häufigkeit der Zusammenstöße der Molekeln eines Sterngases auf. Wir sehen zunächst, daß es sich bei letzteren nicht um wirkliche Zusammenstöße zwischen Sternen handeln kann,

bei denen die Sterne kaum als solche weiterbestehen könnten. Da vom rein dynamischen Standpunkte aus das allein wesentliche Merkmal eines Zusammenstoßes die bei der Annäherung stattfindende beträchtliche Änderung der Größen und Richtungen der Impulse der am Zusammenstoße beteiligten Körper ist, und da bei den Sternen augenscheinlich die von ihnen ausgehenden Gravitationswirkungen an die Stelle der Molekularkräfte zu treten haben, ist es klar, daß in einem Sternsystem die nahen *Begegnungen* von Sternen, bei denen die Krümmungen ihrer Bahnen sowie die Beträge ihrer Geschwindigkeiten in verhältnismäßig kurzen Zeiträumen starken Änderungen unterliegen, die Rolle der Molekülzusammenstöße der klassischen Gastheorie übernehmen werden.

Die Folgen solcher Sternbegegnungen, bei denen die beiden Sterne Hyperbelbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt beschreiben werden, sind nun zweifacher Art: erstens werden die Sterne aus den ursprünglichen Richtungen ihrer Bewegung abgelenkt, und zweitens wird die gesamte kinetische Energie der an der Begegnung beteiligten Körper auf eine neue, von ihren Massen und den näheren Umständen der Begegnung abhängende Weise unter ihnen verteilt. Solange wir uns auf die Betrachtung nur zweier Sterne ohne Bezugnahme auf das übrige System beschränken, können wir allerdings über die stattfindende Energieübertragung nichts aussagen, weil wir dann alle Bewegungen auf den als ruhend angenommenen Schwerpunkt der beiden Sterne beziehen müssen, und die Sterne in bezug auf diesen nach beendeter Begegnung (also in unendlichem Abstande voneinander) ihre ursprünglichen Geschwindigkeiten wiedergewinnen; der ganze Effekt der Begegnung reduziert sich somit auf die Richtungsänderungen dieser Geschwindigkeiten. Immerhin gestattet auch die quantitative Untersuchung dieser Wirkung der Begegnungen wichtige Schlüsse über die Bedeutung solcher Ereignisse für die Theorie des Sterngases zu ziehen, weshalb wir ihr an erster Stelle eine Betrachtung widmen wollen.

1. *Änderungen der Geschwindigkeitsrichtungen bei Sternbegegnungen*[1])

In der Abb. 1 möge G der gemeinsame Schwerpunkt der beiden sich begegnenden Sterne, der Massen m_1 und m_2 sein, die um diesen die zwei punktierten Hyperbeläste beschreiben; und zwar soll sich der Stern S_1 in unendlich großer Entfernung in Richtung der Asymptote KO, der Stern S_2 in Rich-

[1]) Die nachfolgenden Überlegungen sind zuerst von J. H. JEANS in seinen Büchern: Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics (1919) S. 224 ff. und Astronomy and Cosmogony (1928) S. 308 ff. mitgeteilt worden. Vgl. auch W. M. SMART, Stellar Dynamics (1938) S. 315, woher auch die hier benutzte Figur stammt.

tung der Asymptote QX bewegt haben, wobei die *relative* Geschwindigkeit beider Sterne gegeneinander den Wert V gehabt haben soll. Nach der Definition des Schwerpunktes haben wir zu jeder Zeit

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \,, \tag{1}$$

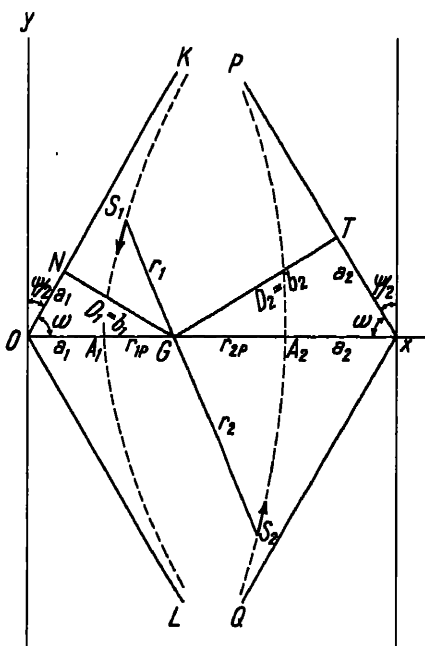


Abb. 1
Bahnen zweier sich begegnender Sterne bezogen auf ihren gemeinsamen Schwerpunkt.

und da der Schwerpunkt natürlich immer auf der Verbindungsgeraden der beiden Massen bleiben muß, d. h. $r_1 V_2 = r_2 V_1$, so folgt

$$V_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} V, \qquad V_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V, \tag{2}$$

wobei V_1 und V_2 die Geschwindigkeiten der beiden Sterne in bezug auf ihren Schwerpunkt bedeuten $(V_1 + V_2 = V)$. Da die auf den Stern S_1 wirkende Kraft gleich

$$-\frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} \tag{3}$$

ist, wo $\varkappa^2$ die Gravitationskonstante bedeutet, und andererseits bekanntlich der bei der Beschreibung der *relativen* Bewegung von S_1 um S_2 zu gebrauchende Kraftansatz

$$-\frac{\varkappa^2 m_1 (m_1 + m_2)}{r^2}\,, \qquad (r = r_1 + r_2) \tag{4}$$

lautet, sieht man sofort, daß die gebräuchlichen Formeln für die Berechnung

der relativen Bewegung in einer Hyperbelbahn auch für die absolute Bewegung von S_1 um den Schwerpunkt G gebraucht werden können, wenn man in ihnen nur die Gravitationskonstante $\varkappa^2$ durch

$$\varkappa'^2 = \varkappa^2 \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^3} \tag{5}$$

ersetzt. Um dies zu zeigen genügt es, in (3) mit Hilfe von (1) r_2 zu eliminieren, und das Ergebnis mit (4) zu vergleichen.

Die uns hier interessierende Richtungsänderung von V_1 wird offenbar durch einen Winkel ψ ausgedrückt, der aus der Formel

$$\psi = 2\,(90^0 - \omega) \tag{6}$$

berechnet werden kann, in der ω den Winkel bedeutet, den die Asymptote mit der reellen Hyperbelachse a_1 bildet, und der seinerseits bekanntlich durch

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{b_1}{a_1} = \sqrt{e_1^2 - 1} \tag{7}$$

gegeben wird, wo e_1 die Exzentrizität der vom Sterne S_1 um den Schwerpunkt beschriebenen Hyperbel ist. Aus (6) und (7) folgt unmittelbar

$$\sin\frac{\psi}{2} = \cos\omega = \frac{1}{e_1} \tag{8}$$

und wir brauchen also nur noch die Exzentrizität e_1 auszurechnen, wozu wir uns des Energiesatzes und des Flächensatzes bedienen. Ersterer lautet in bezug auf den Schwerpunkt G formuliert

$$v^2 = \varkappa'^2 (m_1 + m_2)\left(\frac{2}{r_1} + \frac{1}{a_1}\right) \tag{9}$$

woraus sich durch Einsetzen der zusammengehörigen Wertpaare

$$r_1 = r_{1P},\; v = V_{1P} \quad \text{und} \quad r_1 = \infty,\; v = V_1$$

und Subtraktion

$$V_{1P}^2 - V_1^2 = \frac{2\varkappa'^2 (m_1 + m_2)}{r_{1P}}\,, \tag{10}$$

ergibt. Andererseits folgt aus dem Flächensatze

$$r_P \cdot V_{1P} = D_1 V_1\,, \tag{11}$$

wo $D_1 = GN$ das vom Brennpunkt (also hier dem Schwerpunkte G) auf die Asymptote OK gefällte Lot bedeutet, sowie durch Elimination von V_{1P} aus (10) und (11)

$$D_1^2 = r_{1P}^2 + \frac{2\varkappa'^2 (m_1 + m_2) \cdot r_{1P}}{V_1^2}\,. \tag{12}$$

Da nun nach einem bekannten Theorem D_1 gleich der imaginären Halbachse b_1 der Hyperbel ist, haben wir

$$D_1 = a_1\sqrt{e_1^2 - 1}\,; \qquad r_{1P} = a_1(e_1 - 1) \tag{13}$$

und unter Benutzung von (12)

$$\frac{D_1^2}{r_{1P}^2} = \frac{e_1 + 1}{e_1 - 1} = 1 + \frac{2\varkappa'^2(m_1 + m_2)}{V_1^2 r_{1P}}. \tag{14}$$

Nun sehen wir aus (14), daß die Exzentrizität der von S_1 um den Schwerpunkt G beschriebenen Hyperbel denselben Wert hat, wie die Exzentrizität seiner relativen Bahn um S_2; denn letztere, die wir mit e bezeichnen wollen, wird ja durch eine ganz analoge Formel gegeben, in der nur $\varkappa'^2$ durch $\varkappa^2$, V_1 durch V und r_{1P} durch den Abstand zwischen S_1 und S_2 beim Periheldurchgang ersetzt werden müssen. Setzen wir aber in (14) für $\varkappa'^2$ und V_1 ihre aus (5) und (2) folgenden Werte ein und ersetzen r_{1P} durch den sich auf Grund von (1) leicht ergebenden Wert

$$r_{1P} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(r_{1P} + r_{2P}) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r_P,$$

dann geht diese Formel einfach in die entsprechende für die relative Bewegung geltende über, und ergibt daher natürlich auch denselben Wert von e. Wir schließen hieraus, daß die Exzentrizitäten der beiden absoluten Hyperbelbahnen untereinander gleich und gleich der Exzentrizität der relativen Bahn sind, und somit, nach (8), auch die für die beiden Sterne geltenden Ablenkungswinkel ψ_1, ψ_2 denselben Betrag haben und gleich dem Ablenkungswinkel ψ in der relativen Bahn sind. Dagegen sind die reellen Achsen der beiden absoluten und der relativen Bahnhyperbeln untereinander nicht gleich, sondern ergeben sich aus (9), wenn man den Radiusvektor gleich ∞ und die Geschwindigkeit bzw. gleich V_1, V_2 und V setzt zu

$$a_1 = \varkappa^2 \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{1}{V_1^2}\,; \quad a_2 = \varkappa^2 \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{1}{V_2^2}\,;$$
$$a = \varkappa^2(m_1 + m_2) \cdot \frac{1}{V^2}. \tag{15}$$

Wir können daher bei unseren weiteren Überlegungen ausschließlich die relative Bewegung betrachten, wobei wir auch weiter die Abb. 1 gebrauchen können, indem wir uns z. B. auf die Betrachtung ihrer linken Seite beschränken, unter G nicht mehr den Schwerpunkt beider Sterne, sondern den Stern S_2 verstehen, und bei allen Größen die unteren Indizes 1 weglassen. Wir sehen dann unmittelbar auf Grund von (15), daß der Ablenkungswinkel durch

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{a}{b} = \frac{\varkappa^2(m_1 + m_2)}{V^2 \cdot D} \tag{16}$$

gegeben wird, wo nun D die kleinste Entfernung bedeutet, auf die beide Sterne aneinander gekommen wären, falls sie sich nicht gegenseitig anzögen. Betrachten wir nun einen Stern S_1 der Masse m_1, dem ein Schwarm von

Sternen S_2 begegnet, die alle dieselbe Masse m_2 haben und sich relativ zu S_1 mit derselben Geschwindigkeit V parallel zur Richtung OK bewegen[2]) Die räumliche Dichte dieser Sterne sei mit ν bezeichnet. Alle Sterne des Schwarmes S_2, die dem Sterne S_1 in der Zeit t so begegnen, daß das von ihnen aus auf die Asymptote der jeweiligen relativen Bahn von S_1 gefällte Lot kleiner oder gleich einem bestimmtenWerte D ist, sind in einem Zylinder der Grundfläche πD^2 und der Höhe Vt enthalten. Nach (16) sind dann die Ablenkungen, die S_1 bei allen solchen Begegnungen erfährt, jeweils mindestens gleich ψ. Die Anzahl solcher Begegnungen in der Zeiteinheit ist daher

$$\pi \nu D^2 \cdot V$$

und, wenn wir hierin das D mit Hilfe von (16) durch ψ ersetzen, erhalten wir für die Anzahl der Ablenkungen, die S_1 in der Zeiteinheit erfährt und bei denen seine Geschwindigkeit jeweils mindestens um einen Winkel ψ gedreht wird

$$\frac{\pi \nu \varkappa^4 (m_1 + m_2)^2}{V^3} \operatorname{cotg}^2 \frac{\psi}{2} \,. \tag{17}$$

Wir bemerken, daß die räumliche Dichte ν der betrachteten Sterne S_2 in den Ausdruck (17) linear eingeht; die von Sterngruppen verschiedener Massen herrührenden Effekte lassen sich also summieren, und wir können daher unter ν die gesamte räumliche Sterndichte verstehen und für unsere Abschätzungen die in den Ausdruck eingehenden Größen m_1, m_2, V, durch die für das Sternsystem geltenden Mittelwerte ersetzen.

Die Formel (17) können wir nun in zwei verschiedenen Weisen gebrauchen: Wir können erstens mit ihrer Hilfe die Frage untersuchen, wie oft in einem durch vorgegebene Mittelwerte ν, m_1, m_2, V charakterisierten Sternsystem ein einzelner Stern mit anderen Sternen in einer solchen Weise zusammentrifft, daß seine Geschwindigkeitsrichtung in einer radikalen Weise, etwa um 90°, gedreht wird; zweitens aber können wir Formel (17) auch dazu benutzen, um den aufsummierten Effekt einer Reihe von Begegnungen eines Sternes mit anderen Sternen zu berechnen, wenn bei jeder Begegnung seine Geschwindigkeitsrichtung nur ganz wenig geändert wird.

---

[2]) Wir nehmen zur Vereinfachung an, daß sich der Stern S_1 in einem Sternsystem bewegt, in dem die Sterne S_2 gleichmäßig im Raume verteilt sind und aus *allen* Richtungen auf S_1 zu mit der Relativgeschwindigkeit V herankommen. (Eine evtl. Streuung der Geschwindigkeiten wird also zunächst vernachlässigt.) Da letztere nach der Begegnung ihren ursprünglichen Wert wieder annimmt, werden wir bei der nächsten Begegnung genau dasselbe Bild haben wie bei der vorhergehenden, wenn auch die Bewegungsrichtung eine veränderte sein wird. Wir dürfen daher bei der Berechnung der Häufigkeiten solcher Begegnungen von dieser Richtungsänderung absehen und annehmen, daß alle Sterne S_2 aus einer und derselben Richtung inbezug auf S_1, nämlich der Richtung der Asymptote zur Bahnhyperbel, parallel zu einander herankommen.

Um eine Antwort auf die erste Frage zu erhalten, betrachten wir den zu (17) inversen Wert, der also nicht die Anzahl der Begegnungen einer bestimmten Art in der Zeiteinheit, sondern das zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Begegnungen dieser Art verstreichende mittlere Zeitintervall angibt. Wenn wir nun in diesen Ausdruck unserer Annahme gemäß für den Winkel ψ den Wert 90°, also $\operatorname{cotg} \frac{\psi}{2} = 1$, einsetzen, erhalten wir

$$\frac{V^3}{\pi \nu \varkappa^4 (m_1 + m_2)^2} \text{ Sekunden.} \tag{18}$$

Die bei der numerischen Berechnung dieser Zeit zu benutzenden Werte wollen wir den in der näheren Umgebung der Sonne herrschenden Verhältnissen entnehmen, da wir ja in erster Linie die Eigenschaften des unser Galaktisches System bildenden Sterngases zu erfahren wünschen. Diesen Verhältnissen, die den Gegenstand sehr zahlreicher spezieller Untersuchungen gebildet haben, werden wir in großen Zügen gerecht, wenn wir von den nachfolgenden numerischen Werten Gebrauch machen:

Für die mittlere Masse eines Sternes nehmen wir die Masse der Sonne, also rund

$$m = 2 \cdot 10^{33} \text{ gr.}$$

an und setzen natürlich in Formel (18) $m_1 = m_2$.

Die mittlere räumliche Sterndichte in der Umgebung der Sonne nehmen wir mit JEANS gleich rund einem Sterne in je 10 Kubik-Parsec[3]) an, also

$$\nu = 3.412 \cdot 10^{-57} \text{ Sterne/cm}^3 .$$

Für die mittlere relative Geschwindigkeit der Sterne wählen wir auf Grund der vorliegenden Radialgeschwindigkeiten, den runden Wert von 20 km/sec, also

$$V = 2 \cdot 10^6 \text{ cm/sec.}$$

Der Wert der Gravitationskonstante ist

$$\varkappa^2 = 6.658 \cdot 10^{-8}.$$

Mit diesen Werten ergibt sich aus (18) das gesuchte Zeitintervall[4]) zu etwa

$$3.3 \cdot 10^{11} \text{ Jahren.} \tag{19}$$

---

[3]) Die in der Stellarastronomie heute allgemein gebrauchte Längeneinheit ist das Parsec oder die Entfernung, in der die halbe große Achse der Erdbahn ($149 \cdot 10^6$ km) unter einem Winkel von 1 Bogensekunde erscheint. Da die Parallaxen der Sterne in Bogensekunden gegeben werden, sind ihre Entfernungen in Parsec einfach gleich den inversen Werten ihrer Parallaxen. 1 Parsec = $3.0833 \cdot 10^{18}$ cm.

[4]) Die Anzahl der Sekunden im Jahre ist gleich $3.1572 \cdot 10^7$.

Um die Bedeutung dieses Wertes für die Beurteilung der von den Begegnungen in einem Sternsystem wie das unsrige gespielten Rolle zu verstehen, werden wir ihn mit den Wirkungen vergleichen müssen, die der einzelne Stern von seiten des von sämtlichen anderen Sternen erzeugten Gravitationsfeldes erfährt, was weiter unten geschehen soll. Wir können aber schon auf Grund rein physikalischer Erwägungen schließen, daß diese Rolle in der Geschichte des Sternsystems keine große sein kann, da ja die Lebensdauer eines Sternes nach modernen Anschauungen auf höchstens 10^9 bis 10^{10} Jahre geschätzt wird, weil er in diesem Zeitraume vermutlich schon den größten Teil seiner Masse in Strahlung umgesetzt haben würde. Eine noch viel geringere Bedeutung wäre dann den wirklichen *Zusammenstößen* zuzuschreiben, deren Häufigkeit wir in ganz analoger Weise berechnen können, wenn wir aus (12) (unter Weglassung der Indizes und Ersetzung von $\varkappa'^2$ durch $\varkappa^2$) das D für ein solches r_p bestimmen, das etwa gleich dem doppelten Sternradius ist, und dieses D in den Ausdruck

$$\frac{1}{\pi \nu D^2 V}$$

einsetzen. Der sich auf diese Weise für das mittlere Zeitintervall zwischen zwei tatsächlichen «Berührungsstößen» des Sterns S_1 mit Sternen des Schwarmes S_2 ergebende Wert beträgt etwa

$$1.6 \cdot 10^{17} \text{ Jahre,}$$

wobei für r^p der genäherte Wert des Sonnendurchmessers $d_\odot = 14 \cdot 10^{10}$ cm eingesetzt worden ist.

Zu ähnlichen Ergebnissen führt auch die Betrachtung der kumulativen Wirkung vieler «schwacher» Begegnungen, d. h. die Beantwortung der zweiten der oben gestellten Fragen. Diese Begegnungen werden natürlich viel öfter vorkommen, als die oben erörterten «starken» Begegnungen, dafür werden aber die Winkel, um die die Geschwindigkeitsrichtung des Sternes S_1 jedesmal verändert wird und die wir mit $\psi_1, \psi_2, \ldots$ bezeichnen wollen, alle klein sein, und da sie auch noch beliebig gerichtet sein können, werden wir sie wie zufällige Fehler behandeln dürfen und ihren Gesamteffekt Ψ nach Ablauf einer genügend langen Zeit t nach der Formel

$$\Psi^2 = g_1 \psi_1^2 + g_2 \psi_2^2 + \cdots \tag{20}$$

berechnen, in der die Gewichtsfaktoren $g_1, g_2, \ldots$ die von dem jeweiligen Betrage von ψ abhängigen Häufigkeiten der entsprechenden Drehung bedeuten. Die Anzahl der Begegnungen, bei denen die Geschwindigkeitsrichtung des Sternes S_1 sich um einen zwischen ψ und $\psi + d\psi$ liegenden Winkel ändert, wird offenbar aus der Formel (17) durch einfache Differentiation nach ψ erhalten. Das Ergebnis ist

$$\frac{\pi \nu \varkappa^4 (m_1 + m_2)^2}{V^3} \frac{\cos \frac{\psi}{2}}{\sin^3 \frac{\psi}{2}} \, d\psi$$

oder, für kleine Werte von ψ

$$\frac{8 \pi \nu \varkappa^4 (m_1 + m_2)^2}{V^3} \frac{d\psi}{\psi^3} . \qquad (21)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (20) ein und ersetzen die Summe durch ein Integral über alle Werte von ψ zwischen zwei Grenzen α und β, dann erhalten wir für die mittlere Drehung Ψ, welche in einem Zeitintervalle t durch alle Elementardrehungen zwischen den Beträgen $\psi = \alpha$ und $\psi = \beta$ erzeugt wird

$$\Psi^2 = t \frac{8 \pi \nu \varkappa^4 (m_1 + m_2)^2}{V^3} \int_\alpha^\beta \frac{d\psi}{\psi} = \frac{8 \pi \nu \varkappa^4 (m_1 + m_2)^2}{V^3} \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \cdot t . \qquad (22)$$

Die Wahl der Integrationsgrenzen bedarf noch einer kurzen Erörterung. Für die obere Grenze β dürfen wir ruhig den Wert $\frac{\pi}{2}$ einsetzen, trotzdem der Ausdruck (21) unter der Voraussetzung, daß ψ nur kleiner Werte fähig sein soll, abgeleitet worden ist, und zwar aus dem Grunde, weil die Gewichte, welche den größeren Werten von ψ entsprechen, wie ersichtlich, sehr klein werden. Die passende Wahl von α ist schwieriger zu treffen. Daß die Wahl $\alpha = 0$ nicht zulässig wäre, ergibt sich aus folgender Überlegung: Formel (21) ist nur so lange richtig, als wir es mit Begegnungen des Sternes S_1 mit einzelnen Sternen S_2 («Zweierstößen» der Gastheorie) zu tun haben. Wenn wir aber α sehr klein wählen, also Fälle betrachten, in denen der kleinste Abstand r_p beider Sterne bei der Begegnung sehr groß ist, dann werden sich gleichzeitig auch andere Sterne S_2 mit dem betrachteten Sterne S_1 in einer «Begegnung» befinden, und die Wirkungen solcher mehrfacher Begegnungen (Dreier-, Viererstöße usw.) werden wegen der zu erwartenden weitgehenden Kompensation viel geringer sein als bei Zweierstößen. Wir dürfen das α also höchstens so klein wählen, daß die ihm entsprechende Minimalentfernung beider Sterne, r_p, höchstens gleich dem mittleren Abstande der Sterne in dem von uns betrachteten Raumgebiete wird. Diese kann aber als gleich $\nu^{-\frac{1}{3}}$ angenommen werden. Indem wir zur Vereinfachung statt r_p das D gebrauchen, das von derselben Größenordnung wie r_p ist, erhalten wir die Bedingung

$$D = \nu^{-\frac{1}{3}}$$

und, wenn wir diesen Wert von D in (16) einsetzen, ergibt sich für α der Wert

$$\alpha = \frac{2 \varkappa^2 (m_1 + m_2) \nu^{\frac{1}{3}}}{V^2} .$$

Formel (22) wird nun

$$\Psi^2 = \frac{8\pi\nu\varkappa^4 (m_1 + m_2)^2}{V^3} \cdot \ln\left[\frac{\pi V^2}{4\varkappa^2 (m_1 + m_2)\nu^{\frac{1}{3}}}\right] \cdot t. \qquad (23)$$

Um dieses Ergebnis mit dem oben für «starke» Begegnungen erhaltenen vergleichen zu können, berechnen wir nach Formel (23) die Zeit t, in der die aufsummierte Wirkung der «schwachen» Begegnungen ebenfalls eine Drehung der Richtung der Geschwindigkeit eines Sterns um einen Winkel von 90° bewirken würde, natürlich unter Benutzung derselben numerischen Werte für ν, m und V. Wir setzen also in (23) auf der linken Seite

$$\Psi = \frac{\pi}{2}$$

und lösen nach t auf. Das Ergebnis ist

$$t = 0{,}027 \frac{V^3}{\pi\nu\varkappa^4 (m_1 + m_2)^2} \text{ Sekunden} \qquad (24)$$

und ein einfacher Vergleich dieses Ausdruckes mit (18) lehrt uns ohne jede Rechnung, daß diese Zeit etwa vierzigmal kürzer ist als die in (19) gefundene. Immerhin ist auch sie von der Größenordnung von 10^{13} Jahren, also über tausendmal länger, als die zurzeit von den Astrophysikern den Sternen bewilligte Lebensdauer. Die Bedeutungslosigkeit der durch die Begegnungen in einem Sternsystem wie das Milchstraßensystem verursachten Richtungsänderungen der Sterngeschwindigkeiten läßt sich aber auch durch eine rein dynamische Überlegung einsehen, die gleichfalls auf JEANS zurückgeht. Wie wir oben gesehen haben, ist die räumliche Sterndichte in der Umgebung der Sonne etwa gleich $3 \cdot 10^{-57}$ Sternen pro Kubikzentimeter, was unter der Annahme, daß die mittlere Sternmasse gleich einer Sonnenmasse, also etwa gleich $2 \cdot 10^{33}$ gr. ist, auf eine räumliche Dichte der Materie von rund

$$\varrho = 6{,}4 \cdot 10^{-24} \text{ gr./cm}^3$$

führt. Denken wir uns nun einen sphärisch begrenzten Raum, der von gravitierender Materie mit der soeben angegebenen Raumdichte gleichmäßig angefüllt wäre. Die auf die Masseneinheit in einem Abstande r vom Mittelpunkte dieser Kugel wirkende Gravitationskraft ist dann gleich

$$\frac{4\pi}{3} \varkappa^2 \varrho r \;,$$

und ein Stern würde unter dem Einflusse dieser Kraft eine konzentrische Ellipse um den Mittelpunkt der Kugel beschreiben, deren Periode

$$P = \sqrt{\frac{3\pi}{\varkappa^2 \varrho}} \text{ Sekunden}$$

betragen würde. Mit dem oben angegebenen Werte von ϱ ergibt sich die Länge dieser Periode zu

$$P = 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ Jahren.}$$

Während also die Bewegungsrichtung eines Sternes, unter den in der Umgebung der Sonne im Galaktischen System herrschenden Bedingungen, durch Begegnungen mit anderen Sternen in etwa 10^{13} Jahren höchstens um einen Winkel von 90° verändert wird, vermag das von der Gesamtheit der Sterne ausgehende Gravitationsfeld diese Richtung bereits in 10^8 Jahren, d.h. in einer rund 100000mal kürzeren Zeit, um volle 360° herumzudrehen. Wir schließen hieraus, daß sich die Theorie des Sterngases gerade dadurch von der klassischen Gastheorie unterscheiden wird, daß wir, im Gegensatze zu letzterer, in ihr die «Zusammenstöße» vernachlässigen, das von den «Molekeln» ausgehende Gravitationspotential dagegen in keinem Falle unberücksichtigt lassen dürfen.

2. *Energieübertragung bei Sternbegegnungen. Relaxationszeit*[5])

Da die auf den gemeinsamen Schwerpunkt zweier sich begegnender Sterne bezogenen Geschwindigkeiten dieser Sterne nach der Begegnung, also im Unendlichen, zu ihren ursprünglichen Werten zurückkehren, findet in bezug auf dieses spezielle Inertialsystem keine Energieübertragung von einem Sterne auf den anderen statt. Wenn aber die Bewegung dieses Schwerpunktes auf irgend ein anderes, von ihm unabhängiges Inertialsystem bezogen werden kann und dabei die Geschwindigkeit v_g dieses Schwerpunktes im neuen System nicht gleich Null ist, dann kehren, wie unten gezeigt werden soll, die auf dasselbe System bezogenen Geschwindigkeiten der beiden Sterne nach der Begegnung keineswegs zu ihren ursprünglichenWerten zurück, und

---

[5]) Die Berechnung der bei Begegnungen von Sternen stattfindenden Energieumsätze und, im Anschlusse daran, die Bestimmung der sog. «Relaxationszeit» eines Sternsystems ist von C.V.L. CHARLIER in einer Reihe von Arbeiten (Lund Medd. Ser. I, Nr. 69, 70 und insbesondere 79, und Lund Medd. Ser. II, Nr. 16, 1917), sowie von K. SCHWARZSCHILD in einer aus seinem Nachlasse in der Seeliger-Festschrift (Probleme der Astronomie, S. 94 ff., 1924) abgedruckten Abhandlung durchgeführt worden. Leider enthält letztere Arbeit einen Fehler, der auch von anderen Autoren (S. CHANDRASEKHAR, Strömgren-Festschrift, 1940, L. SPITZER, Jr. M. N. 100, 396, 1940) übernommen worden ist. Da die allgemeine, völlig richtige Ableitung von CHARLIER ziemlich umständlich ist, während die ihr von S. ROSSELAND (Monthly Notices R. A. S. Bd. 88, S. 208, 1928) gegebene einfachere Form umgekehrt von etwas zu speziellen Voraussetzungen ausgeht, schließt sich die hier gegebene Darstellung einer Arbeit von W. FRICKE (Zeitschrift f. Astrophysik, Bd. 20, S. 268 ff., 1941) an, die den Schwarzschild'schen Gedanken unter Vermeidung des obenerwähnten Fehlers zu Ende führt.

es findet daher zwischen ihnen ein *Energieaustausch* statt. Wie aus der Gastheorie bekannt ist, stellt sich als Endergebnis sehr vieler solcher Energieumsätze der Zustand der Äquipartition der Energie ein, der in einem im thermodynamischen Gleichgewichte befindlichen System notwendig realisiert sein muß und aus dem es seine inneren Kräfte nicht mehr herausbringen können. Um uns ein Urteil darüber zu bilden, ob ein Sternsystem, das die Beschaffenheit unseres Galaktischen Systems hat, sich durch die Wirkung der bei Begegnungen seiner Mitglieder stattfindenden Energieumsätze, in einer praktisch in Frage kommenden Zeit diesem Zustande des thermodynamischen Gleichgewichts nähern könnte, wollen wir mit SCHWARZSCHILD die Zeit berechnen, in der der mittlere Energieumsatz der Mitglieder eines Sternsystems durch Vorübergänge aneinander gleich der mittleren kinetischen Energie eines Sterns dieses Systems geworden ist. Nach dieser Zeit müßten alle eventuell anfänglich vorhandenen Eigentümlichkeiten in der Verteilung der Sterngeschwindigkeiten in weitgehendem Maße schon verwischt erscheinen, weshalb diese Zeit als *Relaxationszeit* des Systems bezeichnet wird.

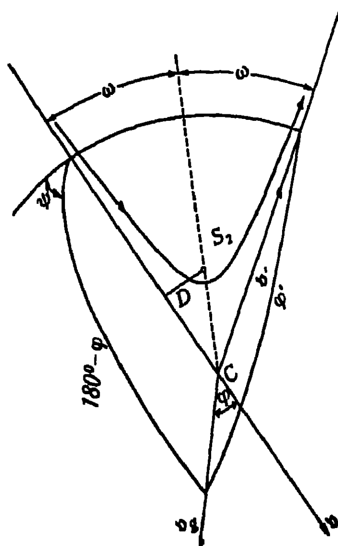


Abb. 2

Bewegung des Schwerpunktes zweier sich begegnender Sterne inbezug auf das Sternsystem.

Wir nehmen also nun an, daß der Schwerpunkt S der beiden sich begegnenden Sterne S_1 und S_2, deren Massen wie früher m_1 und m_2 sein mögen, eine gewisse, irgendwie gerichtete Geschwindigkeit v_g in bezug auf den Schwerpunkt des gesamten Sternsystems hat. In Abb. 2 ist diese Geschwindigkeit als Vektor $\mathfrak{v}_g$ im Schnittpunkte C der Asymptoten der relativen

Bahnhyperbel des Sternes S_1 um den Stern S_2 aufgetragen, mit dessen Bahnebene, die durch die Ebene der Figur dargestellt wird, er im allgemeinen nicht zusammenzufallen braucht. (Die Vernachlässigung dieses Umstandes führte gerade zu dem in der Fußnote auf S. 23 erwähnten Fehler). Vom selben Punkte aus ist auch die Relativgeschwindigkeit V des Sternes S_1 in bezug auf S_2 vor der Begegnung (die der Relativgeschwindigkeit von S_2 in bezug auf S_1 natürlich gleich und diametral entgegengesetzt ist) als Vektor $\mathfrak{v}$, und ferner die Relativgeschwindigkeit V' nach der Begegnung als Vektor $\mathfrak{v}'$ aufgetragen; diese beiden Vektoren liegen selbstverständlich in der Bahnebene und ihre Richtungen fallen mit den Richtungen der beiden Asymptoten der Bahnhyperbel zusammen. Der Winkel φ möge den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_g$ bezeichnen (dann ist der Winkel zwischen der Relativgeschwindigkeit des Sternes S_2 vor der Begegnung und der Schwerpunktsgeschwindigkeit v_g gleich $180^\circ - \varphi$), und ψ den Winkel, den die durch die Vektoren $\mathfrak{v}_g$ und $\mathfrak{v}$ definierte Ebene mit der Bahnebene bildet.

Nach Formel (2) sind dann die Geschwindigkeiten der beiden Sterne vor der Begegnung, bezogen auf ihren gemeinsamen Schwerpunkt S durch

$$V_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} V; \qquad V_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V$$

gegeben, und ihre Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (ebenfalls vor der Begegnung) in bezug auf den Schwerpunkt des ganzen Systems ergeben sich durch vektorielle Addition von V_1 bzw. V_2 mit $\mathfrak{v}_g$. Die absoluten Beträge dieser Geschwindigkeiten sind daher bzw. gleich

$$\begin{aligned} v_1^2 &= v_g^2 + 2 v_g V \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \cos\varphi + V^2 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2, \\ v_2^2 &= v_g^2 - 2 v_g V \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \cos\varphi + V^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Der absolute Betrag der Geschwindigkeit v_1' des Sternes S_1 in bezug auf den Schwerpunkt des Gesamtsystems nach der Begegnung ergibt sich in ganz analoger Weise zu

$$v_1'^2 = v_g^2 + 2 v_g V \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \cos\varphi' + V^2 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2, \tag{26}$$

wo φ' den Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{v}_g$ bedeutet. Der Energieverlust (ein Energiegewinn würde einem negativen Energieverluste entsprechen), den der Stern S_1 bei der Begegnung mit S_2 erleidet, wird daher durch den Ausdruck

$$\varDelta E_1 = \frac{m_1}{2} (v_1^2 - v_1'^2) = v_g V \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\cos\varphi - \cos\varphi') \tag{27}$$

gegeben. Um den Winkel φ' auszurechnen, betrachten wir das in Abb. 2 dargestellte sphärische Dreieck, dessen Seiten bzw. gleich $180^\circ - \varphi$, 2ω (wobei

ω wie früher den Winkel zwischen Asymptote und reeller Hyperbelachse bedeutet) und φ' sind, und in dem der der Seite φ' gegenüberliegende Winkel gleich $180° - \psi$ ist. Es ist daher

$$\cos\varphi' = -\cos\varphi \cos 2\omega - \sin\varphi \sin 2\omega \cos\psi$$

und

$$\cos\varphi - \cos\varphi' = 2\cos\omega\,(\cos\varphi \cos\omega + \sin\varphi \sin\omega \cos\psi). \tag{28}$$

Der Ausdruck für den Energieverlust bei einer Begegnung wird damit

$$\Delta E_1 = 2 v_g V \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cos\omega\,(\cos\varphi \cos\omega + \sin\varphi \sin\omega \cos\psi). \tag{29}$$

Von diesem Ausdrucke ist nun der über alle möglichen Begegnungen genommene Mittelwert zu bilden. Um zunächst den Mittelwert über alle möglichen Werte des Winkels ψ, der mit gleicher Wahrscheinlichkeit jeden beliebigen Wert zwischen 0° und 360° annehmen kann, zu erhalten, multiplizieren wir (29) mit $d\psi$, integrieren zwischen den Grenzen 0 und 2π und dividieren das Ergebnis durch 2π. Es ergibt sich auf diese Weise

$$\overline{\Delta E_1}^{\psi} = 2 v_g V \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cos^2\omega \cos\varphi. \tag{30}$$

Um die weiteren Rechnungen zu vereinfachen, wollen wir an dieser Stelle die prinzipiell ganz unwesentliche Annahme machen, daß wir es in unserem Sternsystem mit Sternen ausschließlich einer und derselben Masse zu tun haben, also

$$m_1 = m_2 = m$$

setzen. Nun ist, wie aus Abb. 2 sofort zu ersehen, wegen (8)

$$\cos^2\omega = 1 - \frac{D^2}{a^2 e^2} = 1 - \frac{D^2 \cos^2\omega}{a^2}$$

und daher, wegen (15), unter der Annahme gleicher Massen

$$\cos^2\omega = \frac{1}{1 + \frac{D^2 V^4}{4\varkappa^4 m^2}}, \tag{31}$$

wo D die frühere Bedeutung hat. Anderseits ergibt sich aus (25) unter der gleichen Voraussetzung

$$2 v_g V \cos\varphi = v_1^2 - v_2^2. \tag{32}$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke in (30) ein, so geht letzterer über in

$$\overline{\Delta E_1}^{\psi} = \frac{m}{2} \frac{v_1^2 - v_2^2}{1 + \frac{D^4 V^4}{4\varkappa^4 m^2}}. \tag{33}$$

Um nun die weiteren Mittelwertbildungen vornehmen zu können, müssen wir irgend welche Annahmen über die räumliche Sterndichte und die Ver-

teilung der Geschwindigkeiten in dem betrachteten Sternsysteme einführen und wollen uns dabei, um die Rechnungen möglichst einfach und übersichtlich zu gestalten, eines von HECKMANN und SIEDENTOPF[6]) eingeführten Kunstgriffes bedienen.

Die Annahmen, von denen die genannten Autoren ausgehen, sind die folgenden:

1. Es sei ein hinreichend ausgedehntes Sternsystem konstanter räumlicher Sterndichte ν gegeben, in dem die Geschwindigkeitsverteilung an jeder Stelle durch einen MAXWELLschen Ausdruck

$$f = \frac{\nu h^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-h^2(u^2+v^2+w^2)} \tag{34}$$

mit dem Präzisionsmasse h dargestellt wird.

2. Dieses System möge von «Fremdsternen» durchdrungen werden, deren Geschwindigkeitsverteilung durch einen entsprechenden Ausdruck

$$F = \frac{H^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-H^2(U^2+V^2+W^2)} \tag{35}$$

mit dem Präzisionsmasse H gegeben wird. Das Verfahren besteht in einer Abschätzung des mittleren Energieumsatzes eines «Fremdsternes» während einer Zeit t, der durch seine Begegnungen mit Systemsternen bedingt wird. Durch nachträgliches Gleichsetzen von h und H wird der Unterschied zwischen Systemsternen und Fremdsternen dann wieder beseitigt, so daß der erhaltene Ausdruck nun den mittleren Energieumsatz eines durchschnittlichen Systemsterns liefert. Aus der Bedingung, daß letzterer gleich der mittleren kinetischen Energie der Systemsterne sein soll, wird schließlich mit Hilfe dieses Ausdrucks die Relaxationszeit erhalten.

Wie schon oben geschehen, charakterisieren wir eine Begegnung durch Angabe der Relativgeschwindigkeit V der beiden beteiligten Sterne und des «Abstandes» D. Dann ist die Anzahl der Begegnungen, die ein Fremdstern in der Zeit t im Abstande $D + \frac{1}{2} dD$ erleidet, augenscheinlich gleich der Summe der Ausdrücke

$$2\pi D\, dD \cdot Vt \cdot f\, du\, dv\, dw$$

für alle möglichen Werte von u, v, w, und es ist daher nach (33), wenn wir die kinetischen Energien der beiden Sterne vor der Begegnung, bezogen auf den Schwerpunkt des gesamten Sternsystems, mit E_1 bzw. E_2 bezeichnen [7])

---

[6]) O. HECKMANN und H. SIEDENTOPF, Zeitschrift f. Astrophysik, Bd. 1, S. 67 (1930) = Veröffentlichungen Göttingen 13.

[7]) Da ΔE sowohl positiv als negativ sein kann (Energiegewinne und -verluste) muß man, um den mittleren Energieumsatz zu erhalten, den quadratischen Mittelwert, also den Mittelwert der Größen $(\Delta E)^2$ bilden. Siehe S. ROSSELAND, M. N. 88, S. 208 ff. (1928).

$$\overline{(\varDelta E)^2} = 2\pi t \int_0^{\infty}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{(E_1 - E_2)^2}{\left(1 + \frac{D^2 V^4}{4\varkappa^4 m^2}\right)^2} \cdot f\, V D\, dD\, du\, dv\, dw\,, \tag{36}$$

wo sich die Integration über alle Werte der Geschwindigkeitskomponenten der Systemsterne, von $-\infty$ bis $+\infty$, und über alle möglichen Werte des Abstandes D, von 0 bis ∞ zu erstrecken hat. Letztere Integration kann unter dem dreifachen Integralzeichen leicht ausgeführt werden, und da

$$\int_0^{\infty} \frac{2D\, dD}{(1 + p^2 D^2)^2} = \frac{1}{p^2}\left[\frac{1}{1 + p^2 D^2}\right]_{\infty}^{0} = \frac{1}{p^2} \qquad \left(p^2 = \frac{V^4}{4\varkappa^4 m^2}\right)$$

ist, ergibt sich aus (36) sofort

$$\overline{(\varDelta E)^2} = 4\pi\, \varkappa^4 m^2 \cdot t \int\int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{(E_1 - E_2)^2}{V^3} f\, du\, dv\, dw. \tag{37}$$

Dies ist der mittlere Energieumsatz, den ein Fremdstern in der Zeit t im System erfährt, wenn er nur mit solchen Systemsternen zusammentrifft, gegen die er sich mit einer bestimmten Relativgeschwindigkeit V bewegt. Um nun den mittleren Energieumsatz eines Fremdsternes überhaupt zu erfahren, müssen wir natürlich den Ausdruck (37) mit der Häufigkeitsfunktion (35) multiplizieren und über alle möglichen Werte der Geschwindigkeitskomponenten eines Fremdsternes, d. h. wieder von $-\infty$ bis $+\infty$, integrieren. Wir erhalten auf diese Weise für den gesuchten mittleren Energieumsatz den Ausdruck

$$\overline{\overline{(\varDelta E)^2}} = 4\pi\, \varkappa^4 m^2 t \int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int \frac{(E_1 - E_2)^2}{V^3} f F\, du\, dv\, dw\, dU\, dV dW, \tag{38}$$

wo für E_1, E_2 und V die Ausdrücke

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{m}{2} v_1^2 = \frac{m}{2}(U^2 + V^2 + W^2) \\ E_2 &= \frac{m}{2} v_2^2 = \frac{m}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \\ V &= \sqrt{(U-u)^2 + (V-v)^2 + (W-w)^2} \end{aligned} \tag{38'}$$

und für f und F die durch (34) und (35) gegebenen Verteilungsfunktionen eingesetzt zu denken sind. (Die Relativgeschwindigkeit V darf hier mit der durch denselben Buchstaben bezeichneten Komponente V der absoluten Geschwindigkeit eines Fremdsterns natürlich nicht verwechselt werden.)

Um dieses auf den ersten Blick etwas komplizierte Integral auszuwerten, wollen wir uns einer (bei W. FRICKE a. a. O. angegebenen) Transformation bedienen. Wir setzen nämlich

$$\xi_1 = \frac{h^2 u + H^2 U}{h^2 + H^2}, \quad \eta_1 = \frac{h^2 v + H^2 V}{h^2 + H^2}, \quad \zeta_1 = \frac{h^2 w + H^2 W}{h^2 + H^2}, \tag{39}$$
$$\xi_2 = U - u, \quad \eta_2 = V - v, \quad \zeta_2 = W - w,$$

wobei die Integrationsgrenzen augenscheinlich unverändert bleiben und das Volumenelement

$$du \ldots dW = d\xi_1 \ldots d\zeta_2$$

wird, weil die JACOBIsche Determinante der Transformation, wie leicht einzusehen ist, den Wert 1 hat. Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$S^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \quad V^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 \tag{40}$$

wird nun nach (38') und (39):

$$\left.\begin{aligned} v_1^2 &= S^2 + \frac{h^4}{(h^2 + H^2)^2} V^2 + \frac{2h^2}{h^2 + H^2} (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2), \\ v_2^2 &= S^2 + \frac{H^4}{(h^2 + H^2)^2} \cdot V^2 - \frac{2H^2}{h^2 + H^2} (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2), \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

während der Ausdruck für das Produkt der Verteilungsfunktionen die Form

$$f \cdot F = \frac{\nu h^3 H^3}{\pi^3} e^{-(h^2 + H^2) S^2 - \frac{h^2 H^2}{h^2 + H^2} V^2} \tag{42}$$

annimmt, und

$$\frac{(E_1 - E_2)^2}{V^3} = \frac{m^2}{4} \left(\frac{h^2 - H^2}{h^2 + H^2}\right)^2 \cdot V + m^2 \left(\frac{h^2 - H^2}{h^2 + H^2}\right) \frac{\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2}{V} + $$
$$+ m^2 \frac{(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2)^2}{V^3} \tag{43}$$

wird. Die Ausführung der Integration vereinfacht sich nun beträchtlich durch die Überlegung, daß, wegen der Beschaffenheit der Integrationsgrenzen, die Integrale über alle ungeraden Funktionen der Veränderlichen gleich Null sein müssen und wir daher alle Glieder mit ungeraden Integranden von vornherein weglassen können. Es wird somit

$$(\Delta E)^2 = 4 \pi \varkappa^4 m^4 t \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{h^2 - H^2}{h^2 + H^2}\right)^2 \cdot J_1 + J_2 \right\}, \tag{44}$$

wo

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int f F V d\xi_1 \ldots d\zeta_2,$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int f F \frac{\xi_1^2 \xi_2^2 + \eta_1^2 \eta_2^2 + \zeta_1^2 \zeta_2^2}{V^3} d\xi_1 \ldots d\zeta_2.$$

Diese beiden Integrale lassen sich nun unschwer auswerten. Es ist zunächst [8]):

$$J_1 = \frac{\nu h^3 H^3}{\pi^6} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h^2 H^2}{h^2 + H^2} V^2} \cdot V \cdot d\xi_2 d\eta_2 d\zeta_2 \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(h^2 + H^2) S^2} d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 =$$

$$= \frac{\nu h^3 H^3}{\pi^3} \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{(h^2 + H^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 4\pi \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{h^2 H^2}{h^2 + H^2} V^2} \cdot V^3 \, dv =$$

$$= \frac{4\nu}{\sqrt{\pi}} \frac{h^3 H^3}{(h^2 + H^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2 \left(\frac{h^2 + H^2}{2 h^2 H^2} \right)^2 = \frac{2\nu}{\sqrt{\pi}} \frac{(h^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}}{h H}.$$

Andererseits ist

$$J_2 = \frac{\nu h^3 H^3}{\pi^3} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h^2 H^2}{h^2 + H^2} V^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{V^3} d\xi_2 d\eta_2 d\zeta_2 \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(h^2 + H^2) S^2} (\xi_1^2 \xi_2^2 + \eta_1^2 \eta_2^2 + \zeta_1^2 \zeta_2^2) \, d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 .$$

Das Integral nach ξ_1, η_1, ζ_1 ist nun, wenn man unter x der Reihe nach ξ_1, η_1 und ζ_1 versteht

---

[8]) Bei der Auswertung von Integralen des Typus

$$J = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 (x^2 + y^2 + z^2)} (x^2 + y^2 + z^2)^n \, dx \, dy \, dz ,$$

die beim Rechnen mit MAXWELLschen Verteilungsfunktionen ständig auftreten, ist es bequem, von einer Transformation auf sphärische Koordinaten

$$x^2 + y^2 + z^2 = v^2 \qquad x = v \sin\vartheta \cos\varphi \qquad y = v \sin\vartheta \sin\varphi \qquad z = v \cos\vartheta$$

Gebrauch zu machen. Das Integral nimmt dann, da das Volumenelement $dx\,dy\,dz = v^2 \sin\vartheta \, dv \, d\vartheta \, d\varphi$ ist, und die Integration über den ganzen Raum erstreckt werden soll, die Form an

$$J = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \int\limits_0^{\infty} e^{-h^2 v^2} v^{n+2} \, dv = 4\pi \int\limits_0^{\infty} e^{-h^2 v^2} \cdot v^{n+2} \, dv .$$

Die Werte der Integrale des letzten hier noch vorkommenden Typus werden durch die mittels partieller Integration leicht abzuleitenden Formeln

$$\left. \begin{aligned} \int\limits_0^{\infty} e^{-h^2 v^2} \cdot v^{2\alpha} \, dv &= \frac{(2\alpha - 1)(2\alpha - 3) \ldots 3 \cdot 1}{2^{\alpha+1} \, h^{2\alpha+1}} \sqrt{\pi} \\ \int\limits_0^{\infty} e^{-h^2 v^2} \cdot v^{2\alpha+1} \, dv &= \frac{2\alpha \, (2\alpha - 2) \ldots 4 \cdot 2}{(2 h^2)^{\alpha+1}} \end{aligned} \right\} \alpha = 1, 2, 3 \ldots$$

gegeben, wobei noch

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-h^2 v^2} \, dv = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{h^2}} \, ; \qquad \int\limits_0^{\infty} e^{-h^2 v^2} \cdot v \, dv = \frac{1}{2 h^2}$$

zu merken ist. Wenn die Grenzen dieser Integrale nicht 0 bis ∞, sondern $-\infty$ bis $+\infty$ sind, dann sind alle Integrale mit ungeraden Integranden gleich Null, die mit geraden Integranden – doppelt so groß.

$$(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2)\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(h^2+H^2)(x^2+y^2+z^2)}\cdot x^2\,dx\,dy\,dz =$$

$$= V^2\frac{\pi}{h^2+H^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(h^2+H^2)x^2}\cdot x^2\,dx = V^2\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2}\,\frac{1}{(h^2+H^2)^{\frac{5}{2}}},$$

womit J_2 gleich

$$J_2 = \frac{\nu h^3 H^3}{2\pi^{\frac{3}{2}}(h^2+H^2)^{\frac{5}{2}}}\cdot 4\pi\int\limits^{\infty} e^{-\frac{h^2H^2}{h^2+H^2}V^2}\cdot V\cdot dV = \frac{2\nu h^3 H^3}{\sqrt{\pi}\,(h^2+H^2)^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{h^2+H^2}{h^2H^2} =$$

$$= \frac{\nu h H}{\sqrt{\pi}\,(h^2+H^2)^{\frac{3}{2}}}$$

wird. Durch Einsetzen der beiden soeben für J_1 und J_2 erhaltenen Werte in (44) ergibt sich

$$\overline{(\varDelta E)^2} = 2\sqrt{\pi}\,\varkappa^4 m^4\nu\cdot\frac{h^4+H^4}{hH\,(h^2+H^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot t. \tag{45}$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir nun die Relaxationszeit eines Sternsystems leicht berechnen. Wir setzen, um den Energieumsatz eines Systemsterns durch Wechselwirkung mit anderen Systemsternen zu erhalten, wie bereits oben erwähnt, $h = H$, und erhalten damit aus (45)

$$\overline{(\varDelta E)^2} = \sqrt{2\pi}\,\varkappa^4 m^4 \nu\cdot\frac{1}{h}\cdot t\,. \tag{46}$$

Nun soll die Zeit t so bestimmt werden, daß der Energieumsatz gleich der mittleren kinetischen Energie eines Systemsterns wird, also, wenn $\overline{V}$ die mittlere Geschwindigkeit dieser Sterne bezeichnet

$$\overline{(\varDelta E)^2} = \overline{(\tfrac{1}{2}\,m V^2)^2} = \frac{m^2}{4}\overline{V^4}\quad, \tag{47}$$

wo $\overline{V^4}$ den Mittelwert der vierten Potenzen der Geschwindigkeiten der Systemsterne bedeutet. Es ist aber, wie sich mit Hilfe der in Fußnote[8]) auf S. 30 gegebenen Formeln leicht ausrechnen läßt

$$\overline{V^4} = \frac{1}{\nu}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}(u^2+v^2+w^2)^2 f\,du\,dv\,dw = \frac{15}{4}\,\frac{1}{h^4}\quad\text{und}\quad\frac{1}{h} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\overline{V}$$

und daher

$$\overline{V^4} = \frac{15}{16}\,\frac{\pi^2}{4}\,(\overline{V})^4\,.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (46) und (47) ein und lösen nach der Zeit t auf, dann ergibt sich die gesuchte Relaxationszeit schließlich zu

$$t = \frac{15\pi\,(\overline{V})^3}{128\sqrt{2}\,\varkappa^4\, m^2\, \nu}\;. \tag{48}$$

Mit den auf S. 19 für die Umgebung der Sonne angegebenen Werten von ν, m und $\overline{V}$, folgt hieraus

Relaxationszeit $t = 1{,}04 \cdot 10^{11}$ Jahren.

Auch diese Zeit übersteigt um das 1000fache die Umlaufszeit eines Sternes in dem homogen gedachten Galaktischen System und ist auch etwa 100 mal länger als die heute physikalisch annehmbar erscheinende Lebensdauer eines Sternes. Der Übergang unseres Sternsystems zu einem Zustande der Äquipartition der Energie würde also eine Zeit beanspruchen, die vermutlich viel länger wäre als seine ganze Lebensdauer. Um so auffallender muß es erscheinen, daß die allerdings noch recht spärlichen Daten, die wir über die Verteilung der Energie unter den Sternen unserer Umgebung besitzen (s. z.B. F. SEARES, Ap. J. 55, 165, 1922), den Eindruck erwecken, daß in ihr die Forderung der Äquipartition der Energie weitgehend erfüllt sein könnte. Wenn sich diese Tatsache durch eingehendere Untersuchungen bestätigen sollte, würde man sich zu dem Schlusse gedrängt sehen, daß das Galaktische System zu einer früheren Zeit einen beträchtlich kleineren Raum eingenommen, also eine viel größere räumliche Sterndichte gehabt haben muß, so daß sich in ihm der Ausgleich der kinetischen Energien in einer viel kürzeren Zeit, als die hier ausgerechnete vollzogen haben müßte. Aus unserer Berechnung geht aber jedenfalls hervor, daß bei der zukünftigen Entwicklung des Systems, die Berücksichtigung der Sternbegegnungen auch vom Standpunkte der bei ihnen stattfindenden Energieaustausche zwischen den Systemsternen völlig überflüssig wäre.

Aus der ganzen in diesem Abschnitte gegebenen Untersuchung geht nun hervor, daß das «Sterngas», aus dem ein normales, nicht übermäßig verdichtetes Sternsystem besteht, mehr Ähnlichkeit mit den in einer hochevakuierten Röhre enthaltenen Gasresten hat (also mit dem Zustande, den CROOKES den «vierten» oder «radianten» Zustand der Materie nannte), als mit einem gewöhnlichen physikalischen Gase. Aber auch dieser Vergleich würde noch in einer Beziehung unvollkommen sein, weil er das von der Gesamtheit aller Sterne ausgehende Gravitationspotential unberücksichtigt läßt, das gerade die Bewegungen der Sterne an jeder Stelle des Systems in maßgebender Weise beeinflußt. Wir können also abschließend sagen, daß die Theorie des Sterngases, zu deren Behandlung wir jetzt übergehen wollen, eine Gastheorie

ohne Zusammenstöße, dafür aber mit einem Gravitationspotential sein muß. Daß es sich bei der Dynamik eines Sternsystems um ein dynamisches Problem «sui generis» handelt, dessen Lösung nicht einfach durch Übertragung der bei der Behandlung anderer Probleme erreichten Ergebnisse gewonnen werden kann, hat A. S. Eddington bereits in seinem 1914 erschienenen Buche «Stellar Movements and the Structure of the Universe» (S. 256) hervorgehoben, indem er die Bemerkung machte, daß von der Dynamik der starren Körper ein stetiger Übergang über die Hydrodynamik und die Gasdynamik zu der «Stellardynamik» führt: in der ersten sind die einzelnen Teilchen bei der Bewegung fest untereinander verbunden; in der zweiten besteht ein stetiger Übergang zwischen den Bewegungszuständen benachbarter Teilchen; in der dritten wirken die benachbarten Teilchen nur noch durch ihre Zusammenstöße aufeinander ein, so daß, wenn auch keine mathematische Stetigkeit mehr besteht, wenigstens eine Art physikalischer Stetigkeit erhalten bleibt; in der letzten sind schließlich die benachbarten Teilchen voneinander gänzlich unabhängig. Das ist also der neue Typus eines dynamischen Systems, dessen Behandlung wir uns jetzt zuwenden müssen.

Die Grundgleichung der Stellardynamik

Zur Charakterisierung des jeweiligen Zustandes eines «Sterngases» führen wir, wie in der gewöhnlichen Gastheorie, eine gewisse Verteilungsfunktion

$$f(x, y, z, u, v, w, t)$$

der drei Lagekoordinaten und der drei «Geschwindigkeitskoordinaten» eines Sternes ein, die aber auch die Zeit t explicite enthalten kann. Wir setzen also voraus, daß es eine Funktion f gibt, die so beschaffen ist, daß

$$dN = f(x, y, z, u, v, w, t)\, dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw \tag{49}$$

die Anzahl der Sterne des Systems angibt, die sich zu einer vorgegebenen Zeit t in einem bei x, y, z gelegenen Volumenelemente $dx dy dz$ befinden, und deren Geschwindigkeitskomponenten längs der drei Koordinatenachsen zu dieser Zeit in dem Intervalle: u bis $u + du$, v bis $v + dv$, w bis $w + dw$ enthalten sind. Hier sind die «infinitesimalen» Strecken dx, dy, dz als klein im Vergleiche mit den Dimensionen des Systems zu verstehen; im «gewöhnlichen» Sinne müssen sie natürlich noch sehr groß sein — etwa von der Größenordnung von 20 Parsec. Bei dieser Auffassung wird jeder Stern durch einen Punkt in einem sechsdimensionalen Raume x, y, z, u, v, w dargestellt, und der Ausdruck (49) liefert dann die Anzahl solcher Punkte, die sich zu

jeder beliebigen Zeit t an jeder beliebigen Stelle x, y, z, u, v, w dieses Raumes in einem Elementarvolumen $d\tau = dx\,dy\,dz\,du\,dv\,dw$ befinden. Unsere Voraussetzung geht also dahin, daß sich diese Anzahl durch eine stetige Funktion der «Raumkoordinaten» in dem betrachteten Hyperraume und der Zeit ausdrücken läßt.

Die auf die oben angegebene Weise definierte Verteilungsfunktion genügt nun in der Tat nicht nur zur Beschreibung des augenblicklichen Zustandes eines Sternsystems, sondern auch zur vollständigen Erfassung aller seiner zeitlichen Veränderungen. Halten wir zunächst die Werte von x, y, z, t fest, so gibt (49) die zu einer Zeit t an einer Stelle x, y, z des Systems herrschende Geschwindigkeitsverteilung der Sterne, und zwar in Form einer Dichteverteilung ihrer «Geschwindigkeitspunkte» im reinen «Geschwindigkeitsraume»; eine solche Darstellung einer Geschwindigkeitsverteilung pflegt man einen «*Geschwindigkeitskörper*» zu nennen. Integrieren wir dagegen den Ausdruck (49) über alle möglichen Werte der Geschwindigkeitskomponenten (meistens wird sich diese Integration über alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken können), bilden also das Integral

$$\nu = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, u, v, w, t)\,du\,dv\,dw\,, \tag{50}$$

dann stellt der Wert ν die an der Stelle x, y, z zur Zeit t vorhandene Gesamtzahl aller Sterne aller möglichen Geschwindigkeiten in dem rein räumlichen Volumenelemente $dx\,dy\,dz$ dar, oder mit anderen Worten, die an der Stelle x, y, z zur Zeit t herrschende *räumliche Sterndichte*. Es ist klar, daß wenn wir nun auch noch die Zeit t variieren lassen, wir dann mit Hilfe unserer Verteilungsfunktion f auch alle zeitlichen Änderungen sowohl der räumlichen Dichteverteilung in unserem System, als auch seines statistischen Bewegungszustandes verfolgen können. Was die mathematischen Bedingungen betrifft, denen die Funktion f zu genügen hat, so bestehen sie, außer natürlich ihrer Stetigkeit, Eindeutigkeit und Differentiierbarkeit, im wesentlichen nur darin, daß sie im Endlichen nur endliche und positive Werte annehmen darf und für unendliche Werte von u, v und w verschwinden muß, weil in einem realen Sternsystem unendlich große Geschwindigkeiten nicht mit endlicher Frequenz vorkommen können.

Um nun die Grundbedingung abzuleiten, die der Verteilungsfunktion f eines Sternsystems durch die von uns über die Eigenschaften eines Sterngases gemachten Voraussetzungen auferlegt wird, greifen wir eine Gruppe von Sternen dieses Systems heraus, nämlich diejenigen Sterne, die sich zu einer Zeit t in dem Volumenelemente $dx\,dy\,dz$, an der Stelle x, y, z befinden und deren Geschwindigkeitspunkte in dem bei u, v, w gelegenen Volumen-

elemente $du\,dv\,dw$ des Geschwindigkeitsraumes enthalten sind. Die Bewegungen dieser Sterne mögen in einem Kraftfelde erfolgen, und wir wollen die Komponenten der Beschleunigung durch dieses Feld, die ein Stern an der Stelle x, y, z erfährt (also die Komponenten der auf die Masseneinheit an dieser Stelle wirkenden Feldkraft) mit X, Y, Z bezeichnen. Diese drei Größen sind im allgemeinen als Funktionen des Ortes (und eventuell auch der Zeit) aufzufassen; wir wollen aber zunächst über ihre genauere Natur — ob sie ein Potential besitzen und ob sie mit der räumlichen Verteilung der Systemsterne in irgend einer Weise zusammenhängen — keinerlei Annahmen machen. Da sich die herausgegriffenen Sterne, bis auf kleine Unterschiede von der ersten Größenordnung, alle parallel zueinander mit der Geschwindigkeit u, v, w bewegen, werden sie nach Ablauf einer kleinen Zeit dt ein Volumenelement derselben Größe (s. Fußnote*) auf S. 36) ausfüllen, das aber nicht mehr bei x, y, z, sondern bei einem Punkte

$$x_1 = x + u\,dt;\quad y_1 = y + v\,dt;\quad z_1 = z + w\,dt \tag{51}$$

liegen wird. Ferner werden die Geschwindigkeiten dieser Sterne wegen der Beschleunigung des Feldes gleich

$$u_1 = u + X\,dt;\quad v_1 = v + Y\,dt;\quad w_1 = w + Z\,dt \tag{52}$$

geworden sein. Nach Formel (49) ist nun die Anzahl dN_1 der Sterne an der Stelle x_1, y_1, z_1 mit den Geschwindigkeitskomponenten u_1, v_1, w_1, zur Zeit $t + dt$ wieder durch die Funktion f ausdrückbar, wenn wir in ihr diese, durch (51) und (52) gegebenen Größen an Stelle der Argumente x, y, z, u, v, w, t einsetzen. Es ist also

$$\begin{aligned} dN_1 = f\,(&x + u\,dt,\ y + v\,dt,\ z + w\,dt, \\ &u + X\,dt,\ v + Y dt,\ w + Z\,dt,\ t + dt)\,dx_1\,dy_1\,dz_1\,du_1\,dv_1\,dw_1\,. \end{aligned} \tag{53}$$

Diese Anzahl muß aber gleich der ursprünglichen Anzahl (49) sein, da es sich ja in beiden Fällen offenbar um dieselben Sterne handelt. Es ist nämlich leicht, durch Zurückverfolgung der Sterne, die nun im neuen Volumenelemente $d\tau_1 = dx_1\,dy_1\,dz_1\,du_1\,dv_1\,dw_1$ liegen, einzusehen, daß, wenn wir alle Geschwindigkeitsänderungen, die nicht durch das Kraftfeld bewirkt werden (also die Wirkungen der Begegnungen) ausschließen, kein «fremder», in dem ursprünglichen Volumen $d\tau$ nicht vorhanden gewesener Stern in das Volumen $d\tau_1$ eingedrungen sein kann. Es ist daher

$$dN = dN_1\ ,$$

und da auch

$$d\tau_1 = d\tau$$

ist [9]), müssen auch die beiden Werte der Verteilungsfunktion einander gleich sein. Wir erhalten daher, indem wir die rechte Seite von (53) bis zu den Gliedern erster Ordnung in dt in eine TAYLORsche Reihe entwickeln und das Ergebnis gleich (49) setzen

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} + X\frac{\partial f}{\partial u} + Y\frac{\partial f}{\partial v} + Z\frac{\partial f}{\partial w} = 0 \ . \qquad (54)$$

Da wir unter X, Y, Z Funktionen der Koordinaten verstehen, ist dies schon eine partielle Differentialgleichung, der unsere Verteilungsfunktion f genügen muß. Nun haben wir es bei einem Sternsystem ausschließlich mit Gravitationskräften zu tun, und diese Kräfte besitzen bekanntlich ein Potential, das wir hier mit V bezeichnen wollen. Die Beschleunigungen X, Y, Z (oder die auf die Masseneinheit wirkenden Kraftkomponenten) lassen sich also immer in der Form darstellen [10])

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}\ , \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}\ , \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}\ , \qquad (55)$$

(wo V im allgemeinen Falle eine Funktion nicht nur von x, y, z, sondern auch von t sein kann), und die Gleichung (54) nimmt somit die Form an

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial w} = 0\ . \qquad (56)$$

---

[9]) Bildet man die JACOBIsche Determinante der Koordinatentransformation (51), (52)

$$\frac{\partial(x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1)}{\partial(x, y, z, u, v, w)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & dt & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & dt \\ \frac{\partial X}{\partial x}dt & \frac{\partial X}{\partial y}dt & \frac{\partial X}{\partial z}dt & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial x}dt & \frac{\partial Y}{\partial y}dt & \frac{\partial Y}{\partial z}dt & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial x}dt & \frac{\partial Z}{\partial y}dt & \frac{\partial Z}{\partial z}dt & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

so sieht man, daß sie bis auf Größen der Ordnung von dt gleich 1 ist; es ist daher bis zu dieser Größenordnung

$$d\tau_1 = \frac{\partial(x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1)}{\partial(x, y, z, u, v, w)}\, d\tau = d\tau\ .$$

Es ist zu beachten, daß hier unter $d\tau$ das *sechsdimensionale* Volumenelement im Koordinaten-Geschwindigkeitsraume gemeint ist, das nach dem bekannten LIOUVILLEschen Theorem für kanonische Koordinatensysteme sogar für alle Zeiten einen konstanten Wert behält. Dem rein «räumlichen» Volumenelemente $dx\,dy\,dz$ würde diese Eigenschaft im allgemeinen nicht zukommen.

[10]) Bei der Definition (55) bedeutet das V die mit *umgekehrtem* Vorzeichen genommene potentielle Energie, also die sog. «Kräftefunktion».

Diese zuerst von J. H. JEANS[11]) und von C. V. L. CHARLIER[12]) betrachtete Gleichung heißt die *Grundgleichung der Stellardynamik,* weil ihr jede als Verteilungsfunktion eines Sternsystems in Frage kommende Funktion $f(x, y, z, u, v, w, t)$ genügen muß. Wie wir nachstehend sehen werden, ist indessen die durch sie ausgedrückte Bedingung in vielen Fällen nicht die einzige, die wir der Verteilungsfunktion f auferlegen müssen.

Die Grundgleichung (56) können wir, mit Hilfe einer Überlegung, die uns auch im Folgenden bei ihrer Lösung gute Dienste leisten wird, noch auf eine andere, sehr bemerkenswerte Form bringen. Wir bemerken, daß wenn wir unter x, y, z, u, v, w die Koordinaten eines einzelnen Sternes des Systems verstehen, die *Bewegungsgleichungen* dieses Sternes wegen (55) in der Form

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \\ \frac{dx}{dt} &= u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w \end{aligned} \tag{57}$$

geschrieben werden können. Es bezeichne nun der Operator D/Dt eine Differentiation nach der Zeit, bei der wir einem Sterne in seiner Bewegung folgen; mit anderen Worten soll der hier betrachtete Differentialquotient die zeitliche Änderung irgend einer Charakteristik darstellen, die sich auf eine Gruppe gemeinsam bewegter Sterne bezieht. Dieser wird augenscheinlich in der Weise erhalten, daß man die totale Derivierte der betreffenden Funktion nach der Zeit bildet, indem man sich für die in ihr auftretenden Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten die durch die Bewegungsgleichungen des Sternes vorgeschriebenen Funktionen der Zeit eingesetzt denkt. Es ist dann

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \\ + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \tag{58}$$

und wenn hierin die Ausdrücke (57) eingesetzt werden, wird dieser Ausdruck mit der linken Seite unserer Grundgleichung (56) identisch. Mithin kann letztere auch in der sehr einfachen Form

$$\frac{Df}{Dt} = 0 \tag{59}$$

geschrieben werden.

In der partiellen Differentialgleichung (56) für die Verteilungsfunktion f erkennen wir sofort die bekannte BOLTZMANNsche Gleichung der Gastheorie[13]),

---

[11]) M. N. 76, 70 (1915), Problems of Cosmogony, S. 229 ff (1919). Astronomy and Cosmogony, S. 355 ff. (1929).

[12]) Lund Medd. Ser. I, Nr. 69/70 (1913), Ser. II, Nr. 16 (1917).

[13]) BOLTZMANN, Vorlesungen über Gastheorie, I, S. 132. J. H. JEANS, Dynamical Theory of Gases, S. 228 (1919).

jedoch in einer vereinfachten Form. Diese Vereinfachung besteht gerade darin, daß in unserer Gleichung die Glieder, die von der Berücksichtigung der Wechselwirkungen zweier benachbarter Sterne aufeinander herrühren, vollständig fehlen. In der in (59) gebrauchten Schreibweise würde die BOLTZMANNsche Gleichung der Gastheorie lauten

$$\frac{Df}{Dt} = \nabla(f) + \square(f), \tag{60}$$

wo die beiden auf der rechten Seite neu hinzukommenden Glieder $\nabla(f)$ und $\square(f)$ die Gewinne und Verluste an Sternen in dem oben betrachteten Elementarvolumen $d\tau$ ausdrücken, die durch die ziemlich plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen entstehen, welche einzelne Sterne infolge naher Vorübergänge bzw. direkter Zusammenstöße mit anderen Sternen erfahren. Wie wir oben gesehen haben, brauchen diese «Passagen-Funktion» $\nabla(f)$ und «Kollisionen-Funktion» $\ulcorner (f)$ in Sternsystemen von der gegenwärtigen Beschaffenheit unseres Galaktischen Systems, und auch in den meisten uns bekannten Außergalaktischen Systemen, nicht berücksichtigt zu werden. Anders liegen allerdings die Verhältnisse in sehr verdichteten Sternsystemen, wie es z. B. die inneren Partien vieler kugelförmiger Sternhaufen sind, worauf wir in einem weiteren Kapitel dieses Buches noch zurückkommen werden. Wir wollen hier nur eine theoretische Schwierigkeit erwähnen, die sich bei der Bestimmung dieser Funktionen für das Sterngas ergibt und die noch keine befriedigende Aufklärung erhalten zu haben scheint. Die Untersuchung des vorhergehenden Abschnittes hat uns gezeigt, daß das Integral über die Quadrate der bei Sternbegegnungen stattfindenen Energieübertragungen $(\Delta E)^2$ konvergent ist, d. h. daß die Wirkung «unendlich ferner» Begegnungen bestimmt nicht in Betracht gezogen zu werden braucht. Nun tritt in der Theorie der «Passagen» und «Kollisionen» ein bestimmtes Integral auf, das man das «Stoßintegral» nennt, und das bei den in der kinetischen Gastheorie auftretenden, mit hohen Potenzen der Entfernung abfallenden Molekularkraftfeldern auch immer konvergent bleibt. Eine Berechnung dieses Integrals auf der Grundlage einer NEWTONschen Anziehungskraft, die von CHARLIER[14]) ausgeführt wurde, hat aber gezeigt, daß dieses Integral *divergent* ist, wenn man die Wirkungen der entferntesten Vorübergänge an einem Stern (ebenfalls als ungestörte Zweikörperprobleme betrachtet) berücksichtigt. Übrigens würde auch das Integral über die einfachen, nicht quadrierten Werte der von einem Sterne erlittenen Energiegewinne und -verluste in einem unendlich

---

[14]) C. V. L. CHARLIER, Statistical Mechanics based on the Laws of Newton, Lund Medd. Ser. II, Nr. 16 (1917); s. auch W. FRICKE, ZS. für Astrophys. Bd. 19, S. 325 (1940).

C. F. LUNDAHL, Lund Medd. Ser. II, Nr. 45 (1926) hat die Untersuchungen CHARLIERS auch auf die «Kollisionen-Funktion» $\square(f)$ für ein Sternsystem ausgedehnt.

ausgedehnten Sternsystem konstanter räumlicher Dichte nicht konvergieren, wenn man auch die entferntesten Vorübergänge mitberücksichtigen wollte. Um mit W. FRICKE zu reden (a.a.O. S. 275), «bleiben bei allen Behandlungsweisen statistischer Gesamtheiten von Massen, die einander nach dem NEWTONschen Gesetze anziehen, eigenartige und in ihren Gründen noch nicht sicher erkannte Schwierigkeiten bestehen».

Die «hydrodynamischen» Gleichungen der Stellardynamik

Die große Ähnlichkeit der oben erhaltenen Grundgleichung (56) der Stellardynamik mit der Grundgleichung der kinetischen Gastheorie legt den Gedanken nahe, daß sich aus (56), ebenso wie aus letzterer, ein System von dynamischen Differentialgleichungen gewinnen lassen muß, die die zeitliche Änderung gewisser den jeweiligen Zustand des Systems charakterisierender Mittelwerte mit dem seine inneren Bewegungen bestimmenden Kräftesystem verknüpfen. Solche statistische Bewegungsgleichungen sind in der Tat für ein Sterngas von J.H. JEANS aufgestellt worden und bieten, wenn auch ihr praktischer Anwendungsbereich bis jetzt in der Dynamik von Sternsystemen nicht groß gewesen ist, insofern ein beträchtliches Interesse, als sich an ihnen bequem übersehen läßt, wie weit die Analogie zwischen einem Sterngas und einem gewöhnlichen Gas getrieben werden kann, und welche der in dieser Theorie auftretenden Begriffe sich auf ein Sterngas noch sinnvoll übertragen lassen.

Um diese Gleichungen abzuleiten, multiplizieren wir unsere Grundgleichung (56) zunächst mit $u\,du\,dv\,dw$ und integrieren über alle Werte von u, v und w zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$; von den hierbei auftretenden Integralen

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial u} \cdot u\,du\,dv\,dw\,, \quad \iiint \frac{\partial f}{\partial v} \cdot u\,du\,dv\,dw\,, \quad \iiint \frac{\partial f}{\partial w} \cdot u\,du\,dv\,dw$$

läßt sich das erste durch partielle Integration in der folgenden Weise umformen:

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial u} \cdot u\,du\,dv\,dw = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Big[f \cdot u\Big]_{-\infty}^{+\infty} dv\,dw - \iiint_{-\infty}^{+\infty} f\,du\,dv\,dw$$

und da die Funktion f, wie bereits oben hervorgehoben, für die Werte $u, v, w = \pm\infty$ verschwinden muß, falls sie die Verteilungsfunktion eines realen Sternsystems ausdrücken soll, folgt hieraus

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial u} \cdot u\,du\,dv\,dw = -\iiint_{-\infty}^{+\infty} f\,du\,dv\,dw\,.$$

Auf demselben Wege ist es leicht einzusehen, daß die beiden anderen Integrale, da ja u, v und w voneinander unabhängige Veränderliche sind, verschwinden müssen, daß also

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial v} \cdot u \, du \, dv \, dw = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial w} \cdot u \, du \, dv \, dw = 0$$

ist. Das Ergebnis, zu dem wir also auf diese Weise kommen, lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f \cdot u \, du \, dv \, dw + \frac{\partial}{\partial x} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f \cdot u^2 du \, dv \, dw + \frac{\partial}{\partial y} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f \, uv \, du \, dv \, dw +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f \cdot uw \, du \, dv \, dw = \frac{\partial V}{\partial x} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f \cdot du \, dv \, dw \, .$$

Nun ist nach (50) das auf der rechten Seite auftretende Integral einfach gleich der räumlichen Sterndichte ν, und wegen des Charakters von f als Verteilungsfunktion, haben die auf der linken Seite stehenden Integrale bzw. die Bedeutung

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f \, u \, du \, dv \, dw = \nu \bar{u} \; ; \quad \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f \, u^2 \, du \, dv \, dw = \nu \overline{u^2} \; ; \quad \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f \, uv \, du \, dv \, dw = \nu \overline{uv} \; ,$$

usw.

wenn $\bar{u}, \overline{u^2}, \overline{uv}$ usw. die *Mittelwerte* der Geschwindigkeitskomponenten, bzw. ihrer Quadrate und Produkte an der betrachteten Stelle x, y, z bedeuten. Indem wir nun die Gleichung (56) der Reihe nach noch mit $v \, du \, dv \, dw$ und $w \, du \, dv \, dw$ multiplizieren und jeweils wieder nach u, v und w in den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ integrieren, erhalten wir das gesuchte Gleichungssystem in der Form

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\nu \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\nu \overline{u^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu \overline{uv}) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu \overline{uw}) &= \nu \frac{\partial V}{\partial x} \, , \\
\frac{\partial}{\partial t}(\nu \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(\nu \overline{uv}) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu \overline{v^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu \overline{vw}) &= \nu \frac{\partial V}{\partial y} \, , \qquad (61) \\
\frac{\partial}{\partial t}(\nu \bar{w}) + \frac{\partial}{\partial x}(\nu \overline{uw}) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu \overline{vw}) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu \overline{w^2}) &= \nu \frac{\partial V}{\partial z} \, .
\end{aligned}$$

Die Ähnlichkeit dieser Gleichungen mit den bekannten *hydrodynamischen Gleichungen* der Bewegung des Gasteilchens $dx \, dy \, dz$ springt natürlich sofort in die Augen. Wir schließen aus ihnen, daß auch bei einem Sterngase in einem gewissen Sinne von Gasdruck, ja sogar von Viskosität gesprochen werden darf, daß diese Begriffe aber hier eine ganz andere physikalische Bedeutung erhalten, als die uns von der Gastheorie her geläufige. Der Gasdruck z. B. äußert sich bei einem Sterngase nicht als eine auf das Volumenelement des

Fluidums wirkende Kraft, da ja eine gegenseitige Beeinflussung, die nur durch die Zusammenstöße bewirkt werden könnte, hier überhaupt nicht stattfindet, sondern drückt nur die einfache Tatsache aus, daß wenn in zwei aneinandergrenzenden Volumenelementen verschiedene räumliche Sterndichten und Geschwindigkeitsverteilungen herrschen, mehr Sterne aus einem Volumenelemente in das andere übergehen werden als in der entgegengesetzten Richtung, und auf diese Weise eine Sternströmung in Richtung des Gradienten des Potentials zustandekommen wird. Noch viel weniger darf der von der Gastheorie her bekannte Begriff der Viskosität ohne einschneidende Änderungen auf ein Sterngas übertragen werden, weil die freie Weglänge eines Teilchens hier nicht, wie in der klassischen Gastheorie vorausgesetzt zu werden pflegt, im Vergleiche zu den Dimensionen des Systems kurz und dabei noch geradlinig ist, sondern eine Länge von der Größenordnung des ganzen Systems hat und dazu noch beliebig gekrümmt sein kann. Solange die Theorie der Sternsysteme noch nicht entwickelt war, haben einige Autoren, so vor allem KAPTEYN, in einer berühmten Untersuchung über die Sternverteilung und die Geschwindigkeitsverteilung im Galaktischen System (Ap. J. 55, 302, 1922), die von ihnen benötigten Beziehungen zwischen der räumlichen Sterndichte, der mittleren Sterngeschwindigkeit und dem Potential direkt der klassischen Gastheorie entnommen (Barometerformel), ohne allerdings hierfür eine genügende Begründung geben zu können. Wie J. H. JEANS (M. N. 82, 128, 1922) auf Grund einer Spezialisierung seiner oben gegebenen Gleichungen (61) für den Fall eines achsensymmetrischen stationären Sternsystems zeigen konnte, war die von KAPTEYN vorgenommene Übertragung der gastheoretischen Begriffe berechtigt gewesen, wenn auch die von ihm vertretene Anschauung über die Struktur des Galaktischen Systems heute als völlig überholt angesehen werden muß. Da nun eine den Verhältnissen in einem wirklichen Sternsystem angepaßte Dynamik heute, dank den Arbeiten von CHARLIER, JEANS, EDDINGTON und anderen vorliegt, erscheint der Versuch, gaskinetische Begriffe auf diese sehr abweichenden Verhältnisse zu übertragen, nicht mehr von Bedeutung. Es war aber zur Klärung der Verhältnisse notwendig, gleich am Anfange unserer Betrachtungen über Stellardynamik, den zwischen einem gewöhnlichen Gase und einem Sterngase bestehenden Ähnlichkeiten und Unterschieden einmal eine eingehendere Besprechung zu widmen.

II. KAPITEL

DAS STERNSYSTEM

Die Grundgleichung der Stellardynamik, die wir im vorhergehenden Kapitel aufgestellt haben, führt ihren Namen insofern zu unrecht, als sie in Wirklichkeit gar keine dynamische, sondern eine rein statistische Beziehung darstellt. Daß dem so ist, kann man am leichtesten aus ihrer Form (54) ersehen, in der ja die Größen X, Y, Z von Hause aus gar nicht als Kräfte, sondern als die Beschleunigungen zu verstehen sind, die ein Stern an der Stelle x, y, z des Raumes erfährt. So aufgefaßt, drückt unsere Grundgleichung einfach die von jeder Dynamik ganz unabhängige Tatsache aus, daß das Volumenelement $d\tau$ zu jeder Zeit nur die Sterne enthält, die sich in ihm zu dieser Zeit vermöge ihrer rein kinematischen Merkmale — Geschwindigkeiten und Beschleunigungen — befinden müssen. Daß das Beschleunigungsfeld X, Y, Z ein Potential V besitzt, ändert an diesem Sachverhalte nichts, denn unsere Gleichung behält auch bei Abwesenheit dieser Spezialisierung ihre Gültigkeit. Das dynamische Element tritt in unseren Betrachtungen erst in dem Augenblicke auf, wenn wir über den Ursprung des Potentials V, um den wir uns bis jetzt noch überhaupt nicht gekümmert haben, eine bestimmte Annahme machen. Hier sind nun drei verschiedene Fälle möglich: 1.) Die Sterne der betrachteten Gruppe besitzen im Vergleiche zu dem *äußeren* Gravitationsfelde, in dem sie sich befinden, so kleine Massen und sind so wenig zahlreich, daß das von ihnen ausgehende Gravitationsfeld vollständig vernachlässigt werden kann. In diesem Falle hat das V mit der Verteilung dieser Sterne nichts zu tun, und es besteht zwischen der Verteilungsfunktion f und der Potentialfunktion V keine andere Beziehung als die, welche durch die Grundgleichung (56) hergestellt wird; wenn wir z. B. nach dem hier geschilderten statistischen Verfahren das System der um die Sonne kreisenden kleinen Planeten studieren wollten, würden wir uns in diesem Falle befinden. 2.) Ein äußeres Gravitationsfeld ist überhaupt nicht vorhanden, und das durch die Potentialfunktion dargestellte Gravitationsfeld rührt ausschließlich von den Massen der Sterne her, deren Bewegungen studiert werden sollen. In diesem Falle sagen wir, daß diese Sterne ein im Raume isoliertes Sternsystem bilden. Das charakteristische Merkmal dieses Falles besteht darin, daß nun zu der Grundgleichung (56) noch eine zweite, die Verteilungsfunktion f mit dem

Potentiale V verbindende Beziehung hinzutreten muß. Diese Beziehung ist durch den Umstand gegeben, daß das Potential immer die POISSONsche Gleichung

$$\nabla^2 V = -4\pi\varkappa^2\varrho \tag{62}$$

erfüllen muß, worin ϱ die räumliche Dichte der gravitierenden Materie an der betrachteten Stelle x, y, z und $\nabla^2 V$ die «LAPLACEsche Derivierte» von V also

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{63}$$

bedeutet. Nun hängt aber die räumliche Dichte der Materie mit der räumlichen Sterndichte in einfacher Weise zusammen: nehmen wir für einen Augenblick an, daß alle Sterne des Systems die gleiche Masse M haben, dann ist augenscheinlich

$$\varrho = M\nu$$

und wir haben wegen (62) und (50) (1. Kapitel)

$$\nabla^2 V = -4\pi\varkappa^2 M\nu = -4\pi\varkappa^2 M \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, u, v, w, t)\, du\, dv\, dw\,. \tag{64}$$

Wenn die Sterne des Systems verschiedene Massen haben, sich aber zu einer endlichen Anzahl von Gruppen zusammenfassen lassen, deren Sterne annähernd gleiche Massen, die wir mit $M_1, M_2, \ldots$ bezeichnen wollen, besitzen, und für die verschiedene Verteilungsfunktionen $f_1, f_2, \ldots$ gelten (wenn also unser Sterngas gewissermaßen ein Gasgemisch darstellt), dann nimmt die POISSONsche Gleichung (62) die etwas kompliziertere Form

$$\nabla^2 V = -4\pi\varkappa^2 \Sigma M_i \nu_i = -4\pi\varkappa^2 \Sigma M_i \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_i(x, y, z, u, v, w, t)\, du\, dv\, dw \tag{65}$$

an, in der die ν_i einzeln aus den entsprechenden f_i nach (50) zu berechnen sind und die räumlichen Sterndichten der verschiedenen Massengruppen an der Stelle x, y, z bedeuten[1]). In dem hier betrachteten Falle würde es zur Lösung des Problems nicht genügen, eine den Anfangsbedingungen angepaßte Verteilungsfunktion f zu bestimmen, die eine Lösung der Grundgleichung (56) ist, sondern es müßte noch dafür Sorge getragen werden, daß zwischen

---

[1]) Es ist zu beachten, daß wenn für irgend eine Zeit t die Verteilungsfunktionen f_i für alle Massengruppen dieselbe Form haben, also in der Gestalt $c_i f$ geschrieben werden können, der Zustand des Systems auch zu jeder anderen Zeit durch eine einzige für alle Gruppen gültige Verteilungsfunktion f beschrieben werden kann, da ja die Beschleunigung, die ein Stern in einem Newton'schen Gravitationsfelde erfährt, von seiner eigenen Masse unabhängig ist, und das anfänglich im ganzen Raume gleichförmige Gemisch von Sternen verschiedener Massen auch im

dieser Funktion f und der in die Grundgleichung eingehenden Potentialfunktion V zu jeder Zeit die Beziehung bestehen bleibt, die durch die *dynamische* Bedingung (64) oder (65) – die POISSONsche Gleichung – verlangt wird.

3.) Schließlich ist auch der «gemischte» Fall möglich, daß die Sterne zwar ein System, aber kein ganz isoliertes Sternsystem bilden, d. h. daß außer dem von ihnen herrührenden, nicht-verschwindenden Potentiale, noch ein weiteres, durch gewisse außerhalb des Systems befindliche Massen erzeugtes *äußeres* Potential vorhanden ist, das auf die Bewegungen der Systemsterne einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß ausübt. In diesem Falle kann das Gesamtpotential V als aus zwei Summanden bestehend dargestellt werden

$$V = V_a + V_i \quad , \tag{66}$$

von denen der erste willkürlich sein kann, während der zweite mit der Verteilungsfunktion vermöge der POISSONschen Gleichung zusammenhängt. Es ist aber zu bemerken, daß auch das Gesamtpotential V dieser Gleichung Genüge leisten wird, da ja V_a, um überhaupt eine NEWTONsche Potentialfunktion darstellen zu können, die LAPLACEsche Gleichung erfüllen muß, die aus (62) hervorgeht, wenn man $\varrho = 0$ setzt, so daß die Summe von V_i und V_a wiederum (64) oder (65) befriedigt.

Wir werden uns bei unseren rein theoretischen Betrachtungen hauptsächlich mit dem Falle 2.) beschäftigen, bei der praktischen Anwendung der Theorie auf konkrete Sternsysteme, namentlich auf unser Galaktisches System, bei dem uns die räumliche Sternverteilung noch sehr ungenügend bekannt ist und es sich daher hauptsächlich um die dynamische Deutung der in unserer unmittelbaren Umgebung beobachteten Erscheinungen handeln wird, mitunter auch von der Vorstellung 3.) Gebrauch machen.

Das allgemeine Problem der Dynamik eines Sternsystems kann folgendermaßen formuliert werden: gegeben sei für eine Sterngruppe zu einer gewissen Zeit $t = 0$ die räumliche Verteilung der Sterne sowie die Geschwindigkeitsverteilung an jeder Stelle des Raumes, also die zur Zeit $t = 0$ bestehende Verteilungsfunktion $f_0(x, y, z, u, v, w)$, und daher auch das Potential V_0 für

---

weiteren Ve.laufe ihrer Bewegungen nicht gestört wird. Die Poisson'sche Gleichung nimmt in diesem Falle die Form

$$\nabla^2 V = -4\pi \varkappa^2 (\Sigma c_i M_i) \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, u, v, w, t)\, du\, dv\, dw = -4\pi \varkappa^2 \overline{M} \nu$$

an, wo $\overline{M}$ die mittlere Sternmasse des Gemisches bedeutet.

In dem allgemeinsten Falle, in dem sich die Sterne nicht in eine diskrete Anzahl von Gruppen nach ihrer Masse einteilen lassen, und die Verteilungsfunktion für jede Masse eine andere Gestalt hat, f also in der Form $f(x, y, z, u, v, w, M, t)$ geschrieben werden muß, würde in (65) an Stelle der Summe natürlich ein Integral über alle Massenwerte M treten müssen.

die Zeit $t = 0$. Gesucht werden zu irgend einer anderen Zeit die Verteilungsfunktion $f(x, y, z, u, v, w, t)$ und das Potential $V(x, y, z, t)$, und zwar sollen diese beiden Funktionen sowohl der Gleichung (56) als auch der Gleichung (64) genügen. (Im Falle eines Gemisches von Sternen verschiedener Massen gilt für jede Verteilungsfunktion f_i eine Gleichung von der Form (56), da die Bilanz natürlich für jede Sterngruppe für sich gebildet werden kann, dagegen nur eine Gleichung (65), weil das Potentialfeld, in dem sich die Sterne bewegen, für alle dasselbe ist.)

Es ist klar, daß die Lösung dieses Problems, bei beliebiger Angabe der Anfangsbedingungen f_0 (und V_0) mit sehr großen Schwierigkeiten verbunden sein muß, und es sind auch bis jetzt keine allgemeingültigen Methoden für sie entwickelt worden. Man hat sich zunächst, um einen Einblick in die verschiedenen Klassen von möglichen Sternsystemen zu gewinnen, darauf beschränkt, gewisse durch verschiedene Symmetrieeigenschaften der Potentialfunktionen V, die auch bei zeitlicher Veränderung des Systems erhalten bleiben müssen — wie z. B. Kugel- oder Achsensymmetrie — ausgezeichnete Sternsysteme zu studieren, d. h. die Eigenschaften der sich bei einer solchen Wahl von V ergebenden Lösungen der Grundgleichung (56) zu ermitteln. Dieser Weg soll auch hier eingeschlagen werden, und der erste Schritt zu seiner Beschreitung wird augenscheinlich in der Aufsuchung der allgemeinen Lösungen der Gleichung (56), bei als bekannt vorausgesetzter Funktion V, bestehen, der wir uns nun zuwenden müssen.

Allgemeine Methode der Lösung der Grundgleichung der Stellardynamik. Das Jeans-Charliersche Theorem

Die Grundgleichung (56) der Stellardynamik, die wir hier von neuem anschreiben wollen,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial w} = 0 \qquad (67)$$

stellt, wenn man sich die Funktion V als vorgegeben denkt, eine ***partielle lineare Differentialgleichung*** dar, der jede Verteilungsfunktion eines unter dem Gravitationspotentiale V stehenden Sternsystems genügen muß. Ihre allgemeine Lösung kann daher nach der von Lagrange angegebenen Methode erhalten werden, die eine Spezialisierung der allgemeinen Methode der Charakteristiken auf lineare Gleichungen darstellt. Bekanntlich läßt sich die Lösung auf die Lösung eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückführen, die im Falle der Gleichung (67) die Gestalt haben[a]):

---

[a]) Siehe z. B. SERRET-SCHEFFERS, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnungen, Bd. III, §§ 874–891 (1914). Gleichungen (68) stellen die Differentialgleichungen der Charakteristiken

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{du}{\frac{\partial V}{\partial x}} = \frac{dv}{\frac{\partial V}{\partial y}} = \frac{dw}{\frac{\partial V}{\partial z}} . \tag{68}$$

Wenn nun $I_1, I_2, \ldots$ voneinander unabhängige Integrale des Gleichungssystems (68) bezeichnen, die durch Auflösung dieses Systems nach den üblichen Methoden erhalten werden können, dann ist die allgemeine Lösung der zugehörigen partiellen Differentialgleichung (67) durch

$$f = F(I_1, I_2 \ldots) \tag{69}$$

gegeben, wo F eine *willkürliche* Funktion der Argumente $I_1, I_2, \ldots$ sein kann. Nun lehrt aber eine Betrachtung des Gleichungssystems (68), daß es nichts anderes ist, als das System der *Bewegungsgleichungen eines einzelnen Sternes* (vgl. (57)), und wir erhalten daher das von J. H. Jeans[3]) und C.V. L. Charlier[4]) unabhängig voneinander formulierte Theorem:

Die allgemeinen Integrale der Grundgleichung (67) *der Stellardynamik, also die allgemeine Form der Verteilungsfunktion f eines Sternsystems, werden durch willkürliche Funktionen der ersten Integrale der Bewegungsgleichungen des einzelnen Sternes unter dem Einfluß des Gesamtpotentials des Systems gegeben.*

Wir werden den Inhalt dieses Theorems, bei der Behandlung eines wichtigen Spezialfalles, nämlich des in der Zeit unveränderlichen *stationären* Sternsystems, noch einer genaueren Betrachtung unterziehen. An dieser Stelle soll nur auf seinen Zusammenhang mit der auf S. 37 gegebenen Deutung der Grundgleichung hingewiesen werden. Dort war gezeigt worden, daß der Inhalt dieser Gleichung auch in der Form ausgedrückt werden kann, daß sich die Verteilungsfunktion f längs der Bahn eines Sternes des Systems nicht ändert, oder mit anderen Worten, daß die totale Ableitung von f nach der Zeit, unter Berücksichtigung der Bewegungsgleichungen des einzelnen Sternes gleich Null ist (Gl. (59)). Da nun aber die ersten Integrale der Bewegungsgleichungen auch diese Eigenschaft haben, sich längs der Bahn eines Sternes nicht zu ändern, muß die Funktion f durch irgend eine Funktion gerade dieser Verbindungen der Variablen x, y, z, u, v, w, t dargestellt werden können. Natürlich muß die auf diese Weise ausgedrückte Funktion f noch so spezialisiert werden, daß sie auch der durch die Gleichung (64) bzw. (65) ihr auferlegten dynamischen Bedingung Genüge leistet.

---

der durch (67) definierten 7-dimensionalen Kontinua im 8-dimensionalen Raume x, y, z, u, v, w, t, f dar. Die Zusatzgleichungen, welche in jedem Punkte den «Elementarkegel» bestimmen, den der auf der Integralfläche liegende charakteristische Streifen berühren soll, fallen hier weg, weil dieser Kegel bei einer *linearen* partiellen Differentialgleichung in eine «Gerade» (die Achse des zugeordneten «Ebenenbüschels») ausartet. (s. Serrets-Scheffers, a. a. O., § 875).

[3]) M. N. *76*, 70, (1915).

[4]) Lund. Medd. Ser. II, *10*, (1918).

Wir wenden uns nun der Betrachtung des wichtigsten, bis jetzt auch bei den Anwendungen der allgemeinen Theorie am häufigsten behandelten Spezialfalles zu, in dem das Sternsystem sich in einem solchen Zustande befindet, der sich – statistisch gesprochen – mit der Zeit nicht ändert, d.h. in dem die seinen statistischen Zustand charakterisierenden Größen, also seine räumliche Dichteverteilung und die in ihm an jeder Stelle herrschende Geschwindigkeitsverteilung — kurz seine Verteilungsfunktion — die Zeit t nicht explicite enthalten. Ein solcher, durch die Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{70}$$

charakterisierter Zustand wird als ***stationär*** bezeichnet. In diesem Falle nehmen die Grundgleichung (67) und das ihr zugeordnete System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (68) die einfachere Form an:

$$u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial w} = 0\,, \tag{71}$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{du}{\frac{\partial V}{\partial x}} = \frac{dv}{\frac{\partial V}{\partial y}} = \frac{dw}{\frac{\partial V}{\partial z}}\,, \tag{72}$$

und die allgemeine Lösung von (71) wird durch

$$f = F(I_1, I_2 \ldots) \tag{73}$$

gegeben, wo F wie früher eine willkürliche Funktion der Argumente $I_1, I_2 \ldots$ ist, und letztere die ***von der Zeit unabhängigen*** ersten Integrale der Bewegungsgleichungen (72) bedeuten. Auch die «hydrodynamischen» Gleichungen (61) vereinfachen sich nun zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\nu\overline{u^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu\overline{uv}) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu\overline{uw}) &= \nu\frac{\partial V}{\partial x} \\
\frac{\partial}{\partial x}(\nu\overline{uv}) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu\overline{v^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu\overline{vw}) &= \nu\frac{\partial V}{\partial y} \\
\frac{\partial}{\partial x}(\nu\overline{uw}) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu\overline{vw}) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu\overline{w^2}) &= \nu\frac{\partial V}{\partial z}\,.
\end{aligned} \tag{74}$$

Daß die stationären Fälle vom rein mathematischen Standpunkte aus eine ausgezeichnete Stellung einnehmen und ein besonderes Interesse beanspruchen dürfen, ist ohne weiteres klar; im Hinblicke auf eine zweckmäßige Anwendung der allgemeinen Theorie auf praktisch vorkommende Sternsysteme ist es aber wichtig, sich auch über die ***physikalische*** Bedeutung dieser Fälle eine klare Vorstellung zu machen und sich ihre Stellung in der unübersehbaren Reihe aller möglichen, auch zeitlich veränderlichen Sternsysteme zu

vergegenwärtigen. Daß es sich hier nicht um den theoretischen Endzustand der physikalischen Entwicklung, d. h. um den Zustand des sog. thermodynamischen Gleichgewichts handelt, bei dem an jeder Stelle des Systems die MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung gilt, und somit keinerlei Sternströmungen mehr auftreten, dafür aber das Gesetz der Äquipartition der Energie streng erfüllt ist, geht schon daraus hervor, daß dieser Zustand für alle Systeme derselbe sein müßte und nur durch die dauernde Einwirkung der bei den Sternbegegnungen stattfindenen Richtungs- und Energieausgleiche herbeigeführt werden kann, die wir aus unseren Betrachtungen ausdrücklich ausgeschlossen haben, weil wir ihre Bedeutungslosigkeit für die Entwicklung eines normalen Sternsystems innerhalb der für eine solche aus physikalischen und dynamischen Gründen praktisch in Frage kommenden Zeiten erkannt hatten. Die hier zur Sprache kommenden stationären Zustände sind daher gewissermaßen nur Zwischenstufen, die durch die Einwirkung der von uns nicht berücksichtigten Effekte auch überschritten werden können. Um uns diesen Sachverhalt zu vergegenwärtigen, teilen wir die auf den einzelnen Stern wirkenden Kräfte in zwei Gruppen ein, nämlich: A) die von den Sternen der unmittelbaren Nachbarschaft des Sternes ausgehenden Gravitationskräfte und B) die durch das Gesamtpotential des Systems bedingten Gravitationskräfte, und gehen von der Vorstellung aus, daß der Zustand thermodynamischen Gleichgewichts von einem Sternsystem gewissermaßen in zwei Schritten erreicht wird. Da die Kräfte A, wie wir wissen, den Bewegungszustand des Systems viel langsamer verändern als die Kräfte B, wird letzteres zunächst einem in bezug auf diese Kräfte B allein stabilen Zustande zustreben. In einem solchen Zustande wird dann der mittlere Effekt der Kräfte B gleich Null sein, so daß unter ihrem Einflusse keine weiteren Veränderungen im System stattfinden können. Nun treten die Kräfte A, die auf den Wechselwirkungen zwischen benachbarten Systemsternen beruhen, allein noch in Erscheinung und führen das System, nach einer sehr langen Zeit, in den Zustand des thermodynamischen Gleichgewichts über, oder richtiger, sind bestrebt es zu tun; denn ein reales Sternsystem kann in Wirklichkeit diesen Zustand niemals erreichen, erstens wegen der vermutlich viel zu kurzen Lebensdauer seiner Sterne, und zweitens weil die isotherme Gaskugel einen unendlichen Radius hat und daher von einem aus einer endlichen Anzahl von Sternen bestehenden System nur bei unendlich kleiner Dichte, d. h. im Zustande vollständiger «Verödung» realisiert werden kann. Die durch die Gleichungen (70) – (74) charakterisierten, nur in bezug auf die Kräfte B stabilen, stationären Zustände können dagegen bei der Entwicklung eines Sternsystems sehr wohl eintreten und während langer Zeiten bestehen, und es ist daher, in Ermangelung aller experimenteller Daten über die zeitlichen Änderungen in den uns bekannten Sternsy-

stemen, nur natürlich, von der Betrachtung gerade dieser, mathematisch besonders einfacher Zustände auszugehen, und die dabei erhaltenen Ergebnisse mit den Beobachtungen zu vergleichen.

In einem stationären Zustande der oben beschriebenen Art ist natürlich auch das Potential V von der Zeit unabhängig, also eine reine Ortsfunktion, und die allgemeinste Form der für ein in einem solchen Zustande befindliches Sternsystem gültigen Verteilungsfunktion f wird nach (73) durch eine willkürliche Funktion der von der Zeit unabhängigen Integrale der Bewegungsgleichungen des einzelnen Sternes im System unter dem Einflusse des Gravitationspotentials $V(x, y, z)$ gegeben, die nur noch der dynamischen Bedingung (64) — der POISSONschen Gleichung – unterworfen ist. Nun gibt es aber augenscheinlich im ganzen fünf solche voneinander unabhängige erste Integrale, entsprechend den fünf gewöhnlichen Differentialgleichungen (72), und es entsteht daher die Frage, ob die Verteilungsfunktion von allen fünf Integralen abhängen muß, und wenn nicht, wie die in ihr wirklich auftretenden Integrale beschaffen sein müssen und worin sie sich eventuell von den anderen Integralen unterscheiden. Um die mathematischen Verhältnisse zu übersehen, wollen wir diese Frage zunächst an einem sehr vereinfachten Beispiele studieren, das von POINCARÉ in seinen «Leçons sur les Hypothèses Cosmogoniques» (S. 95 ff., 1913) behandelt und durch ein äußerst anschauliches Modell erläutert worden ist.

Wir nehmen an, daß die Verteilungsfunktion f nur von den Raumkoordinaten x, y, z, nicht aber von den Geschwindigkeitskoordinaten u, v, w abhängt, mithin nur die räumliche Dichte der Systemteilchen an jeder Stelle angibt. Anstelle unseres sechsdimensionalen Problems setzen wir also ein dreidimensionales, führen aber noch die Voraussetzung ein, daß die Geschwindigkeiten der Teilchen, deren Komponenten wir mit X, Y, Z bezeichnen wollen, an jeder Stelle genau vorgegeben sind. Unter X, Y, Z verstehen wir also im weiteren bekannte Funktionen von x, y, z[5]). Ein solches System läßt sich nun sehr gut durch eine Flüssigkeitsbewegung veranschaulichen. Denken wir uns, daß in einem Glasgefäße ein Gemisch von zwei Flüssigkeiten, einer durchsichtigen und einer gefärbten, enthalten ist, und nehmen uns vor, die räumliche Dichte der gefärbten Flüssigkeit, die wir mit $\nu(x, y, z)$ bezeichnen und mit unserer dreidimensionalen Verteilungsfunktion f identifizieren, bei verschiedenen stationären Zuständen des im allgemeinen in Zirkulation befindlichen, inkompressiblen Gemisches zu studieren. Die Rolle der farblosen Flüssigkeit beschränkt sich in unserem Beispiele darauf, das «Geschwindigkeitsfeld», das hier anstelle des Kraftfeldes des allgemeinen

[5]) Die hier mit X, Y, Z bezeichneten Geschwindigkeiten sind natürlich nicht mit den auf S. 35 mit denselben Buchstaben bezeichneten Beschleunigungen zu verwechseln.

Problems treten muß, zu definieren: die Teilchen der gefärbten Flüssigkeit schweben in der farblosen Flüssigkeit, und ihre Geschwindigkeiten an jeder Stelle sind nur durch das zeitlich konstante Zirkulationsfeld des Gemisches bestimmt, von dem Verhältnisse der «Konzentrationen» beider Flüssigkeiten an der betrachteten Stelle aber gänzlich unabhängig. Unter diesen Bedingungen sind die Bahnen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen durch die Gleichungen gegeben:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \ (= dt), \tag{75}$$

die bei zeitlich veränderlichen Strömungsfeldern, bei denen X, Y, Z Funktionen von x, y, z und t sein können, anstelle unserer früheren Gleichungen (68) des allgemeinen Problems zu treten hätten, im stationären Falle aber, in dem t in den Funktionen X, Y, Z nicht explicite auftritt, mit den Gleichungen (72) in Parallele zu stellen sind. Da wir unser Flüssigkeitsgemisch als inkompressibel vorausgesetzt haben, müssen die Komponenten der Stromgeschwindigkeit der Inkompressibilitätsgleichung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \tag{76}$$

genügen. Wenn nun das Geschwindigkeitsfeld von Ort zu Ort ganz unregelmäßig hin und her schwankt, und die Konzentrationen beider Flüssigkeiten an jeder Stelle zu irgend einer Anfangszeit willkürlich vorgegeben sind, werden sich diese Konzentrationen im Verlaufe der Bewegung stetig ändern, und es wird sich in den meisten Fällen nach einer hinreichend langen Zeit ein solcher stationärer Zustand ausbilden, bei dem das Mischungsverhältnis beider Flüssigkeiten an allen Stellen des Gemisches dasselbe sein wird. Dies ist der wahrscheinlichste Zustand und auch der endgültig stationäre, denn eine Entmischung findet dann ohne äußere Einwirkungen natürlich nicht mehr statt. Dieser Zustand, der dem Zustande des thermodynamischen Gleichgewichts unseres allgemeineren Problems entspricht, ist aber nicht der einzige mögliche stationäre Zustand. Um dies einzusehen, bedenken wir, daß für jede der beiden von uns betrachteten Flüssigkeiten für sich die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial (\nu X)}{\partial x} + \frac{\partial (\nu Y)}{\partial y} + \frac{\partial (\nu Z)}{\partial z} = 0 \tag{77}$$

gelten muß, in der ν die räumliche Dichte der einen Flüssigkeit (hier also der gefärbten) bezeichnet.

Im stationären Falle, in dem $\frac{\partial \nu}{\partial t} = 0$ sein muß, geht diese Gleichung über in

$$\frac{\partial (\nu X)}{\partial x} + \frac{\partial (\nu Y)}{\partial y} + \frac{\partial (\nu Z)}{\partial z} = 0 , \tag{78}$$

und wenn wir uns in diesem Ausdrucke die Differentiationen ausgeführt denken und die Gleichung (76) beachten, ergibt sich hieraus

$$X \frac{\partial \nu}{\partial x} + Y \frac{\partial \nu}{\partial y} + Z \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0 . \tag{79}$$

Diese Gleichung, die eine partielle Differentialgleichung für $\nu(x,y,z)$ darstellt, ist nun einfach eine Spezialisierung unserer Grundgleichung (71) für den Fall, daß nicht nur $\frac{\partial f}{\partial t}$, sondern auch $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w}$ gleich Null sind, und die Verteilungsfunktion f nur noch die räumliche Dichte ν der Systemteilchen ausdrückt. Nun können wir in (79) die Geschwindigkeitskomponenten X, Y, Z nach (75) durch die ihnen proportionalen Komponenten des Bahnelementes dx, dy, dz ersetzen, wodurch sich die allgemeine Bedingung der Stationarität in der Form

$$\frac{\partial \nu}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \nu}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \nu}{\partial z}\, dz = 0 \tag{80}$$

ergibt. Wir können diese Bedingung dahin formulieren, *daß in einem stationären Zustande die räumliche Dichte ν längs der ganzen Bahn irgend eines Teilchens der gefärbten Flüssigkeit konstant bleibt.*

An Hand dieser Bedingung lassen sich nun die verschiedenen stationären Zustände, deren unser System fähig ist, bequem untersuchen; wir brauchen dazu nur die verschiedenen Arten von Bahnen, die ein Teilchen unserer Flüssigkeit beschreiben kann, durchzumustern. Diese Bahnen werden im allgemeinen außerordentlich verwickelte Kurven sein, und mit Annäherung an den Zustand elementarer Unordnung (vollständiger Vermischung beider Flüssigkeitsarten) immer verwickelter werden, weil in diesem Zustande das Geschwindigkeitsfeld keine systematischen Eigentümlichkeiten aufweisen darf, sondern von einem Punkte zum anderen ganz unregelmäßig schwanken muß. Das einzelne Teilchen beschreibt dann meistens eine Bahn, die es im Laufe der Zeit an jede Stelle des von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes gelangen läßt. Ein bekanntes Beispiel einer solchen Kurve, wenn auch natürlich nur ein ganz spezieller Fall, ist die sog. LISSAJOUSsche Kurve, deren Gleichung in Parameterdarstellung lautet:

$$x = \alpha \sin(At + K_1); \quad y = \beta \sin(Bt + K_2); \quad z = \gamma \sin(Ct + K_3) \tag{81}$$

und die sich, wenn die Größen A, B, C untereinander inkommensurabel sind, niemals schließt, sondern das durch die Kantenlängen α, β, γ definierte Parallelepiped überalldicht erfüllt. Wenn die Bahnkurven unserer Flüssigkeit diese Eigenschaft haben, den ganzen von ihr eingenommenen Raum auszufüllen, dann muß nach der Aussage der Gleichung (80) die räumliche Dichte ν im ganzen Raume dieselbe, also

$$\nu = \text{const.} \tag{82}$$

sein, und die Vermischung der beiden Flüssigkeiten ist eine vollkommene geworden. Nun können wir aber die Funktionen $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ auch so gewählt denken, daß die Bewegungsgleichungen (75) für irgend eine holonome Beziehung

$$I_1(x, y, z) = \text{const.} \tag{83}$$

zwischen den Koordinaten identisch befriedigt werden. Hierdurch wird in dem von der Flüssigkeit eingenommenen Raume ein System von Flächen definiert, und, wenn sich die einzelnen Flächen dieser Schar nicht schneiden, dann wird, bei dem Bestehen eines Integrals der Form (83) der Differentialgleichungen (75), jede Bahnkurve vollständig auf einer durch einen besonderen Wert der Konstanten gekennzeichneten Fläche dieser Schar liegen.

Wenn nun die Bahnkurven diese «zweidimensionalen Räume» in derselben Weise überalldicht erfüllen, wie das in dem erstbetrachteten Falle für den dreidimensionalen Raum der Fall war, dann läßt sich die Stationaritätsbedingung (80) augenscheinlich schon dadurch befriedigen, daß man auf jeder einzelnen Fläche der Schar die Dichte ν gleich einer Konstanten setzt, wobei diese Konstante nun aber von Fläche zu Fläche verschiedene Werte haben kann. Wir gelangen also in diesem Falle zu einem stationären Zustande, der mit dem Zustande vollständiger Durchmischung beider Flüssigkeiten nicht mehr identisch ist und durch die Verteilungsfunktion

$$\nu = F(I_1) \tag{84}$$

für die räumliche Dichte charakterisiert wird. Die Bedingung für die Zulässigkeit dieses Ansatzes ist aber natürlich, daß die Bahnen der sich auf den einzelnen Flächen bewegenden Teilchen den ihnen zur Verfügung stehenden Raum auch tatsächlich vollständig ausfüllen, d. h. daß jedes Flüssigkeitsteilchen bei seiner Bewegung mit der Zeit wirklich an jede Stelle der betreffenden Fläche gelangt. Als einfachstes Beispiel nehmen wir den Fall, daß die Strombewegung in parallelen Ebenen geschieht, daß also z. B. immer die Bedingung $Z = 0$ gilt; aus (75) folgt dann unmittelbar $dz = 0$, $z = \text{const.}$ und ein Austausch von gefärbten und farblosen Flüssigkeitsteilchen kann nur innerhalb der einzelnen zur XY-Ebene parallelen Ebenen stattfinden, niemals aber zwischen zwei verschiedenen Ebenen. Mit der Zeit wird sich auf jeder Ebene ein Zustand vollständiger Vermischung beider Flüssigkeiten einstellen, sodaß die Färbung des Gemisches auf parallelen Ebenen eine konstante sein wird, und dieser Zustand wird dann auch ein stationärer sein, doch kann die relative Konzentration beider Flüssigkeiten, also auch die Dichte ν der gefärbten Flüssigkeit, auf jeder Ebene ganz willkürlich angesetzt werden, und dieser Sachverhalt wird gerade durch den Ansatz (84), in dem F wie früher eine *willkürliche* Funktion ihres Argumentes I_1 bedeutet, zum Ausdrucke gebracht.

Wenn nun außer dem Integrale (83) noch ein zweites Integral

$$I_2(x, y, z) = \text{const.} \tag{85}$$

der Bahngleichungen (75) vorhanden ist, das wiederum eine Flächenschar definiert, deren einzelne Flächen wie früher die Eigenschaft haben, daß die jeweiligen Bahnen vollständig auf ihnen enthalten sein müssen, ist es natürlich unmöglich, daß diese Bahnen nun sowohl eine Fläche der ersten Schar, als auch eine Fläche der zweiten Schar überalldicht erfüllen; zwei Flächen der ersten und zweiten Schar

$$I_1(x, y, z) = c_1 \; ; \quad I_2(x, y, z) = c_2 \tag{86}$$

bestimmen aber zusammen eine Kurve, und wenn die Bahnen der einzelnen Teilchen gerade durch diese Kurven gegeben sind, findet eine Wechselwirkung zwischen auf verschiedenen Kurven sich bewegenden Teilchen überhaupt niemals statt, und die räumliche Dichte kann längs jeder dieser Kurven einen beliebigen konstanten Wert annehmen, wenn ein stationärer Zustand erreicht worden ist. In diesem Falle ist der allgemeinste Ausdruck für die räumliche Dichte augenscheinlich

$$\nu = F(I_1, I_2) \; . \tag{87}$$

Um auf unser konkretes Beispiel zurückzugreifen, nehmen wir an, daß außer der Bedingung $Z = 0$, die, wie wir oben gesehen haben, das Integral $z =$ const. der Bahngleichungen (75) zur Folge hat, noch eine zweite Bedingung

$$Xx + Yy = 0$$

für die Geschwindigkeitskomponenten besteht, die augenscheinlich aussagt, daß die immer in einer zur XY-Ebene parallelen Ebene liegende Zirkulationsgeschwindigkeit auch noch überall senkrecht zu dem vom Nullpunkte des Koordinatensystems gezogenen Radiusvektor des Teilchens sein muß. Eliminiert man mit Hilfe dieser Beziehung X, Y aus den Bahngleichungen (75), so ergibt sich

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \quad \text{und daher} \quad x^2 + y^2 = \text{const.}$$

als ein zweites Integral dieser Gleichungen bei der hier getroffenen speziellen Wahl der Funktionen X, Y, Z. Die einzelnen Teilchen bewegen sich also auf Kreisen, die die Schnitte der zu der XY-Ebene parallelen Ebenenschar mit der Schar aller Kreiszylinderflächen darstellen, deren Achse die Z-Achse des Koordinatensystems ist. Jetzt kann eine Wechselwirkung der Teilchen nur noch innerhalb eindimensionaler Räume, nämlich auf den einzelnen Kreisbahnen stattfinden, und wenn auf jeder Kreisbahn die Vermischung der bei-

den Flüssigkeiten eine vollständige geworden ist, haben wir einen neuen stationären Zustand vor uns, bei dem die räumliche Dichte auf jedem Kreise einen konstanten, von Kreis zu Kreis aber beliebig angebbaren Wert haben muß.

In dem hier betrachteten dreidimensionalen Falle, in dem sich die Verteilungsfunktion auf die räumliche Dichte $\nu(x, y, z)$ reduziert, sind die möglichen Fälle damit erschöpft.

Die an dem Modelle eines Flüssigkeitsgemisches vorgenommenen Betrachtungen, die uns nur ein anschauliches Bild der mathematischen Verhältnisse in unserem Problem vermitteln sollten, lassen sich nun leicht auf beliebig viele Dimensionen ausdehnen. Zu diesem Zwecke betrachten wir ein mechanisches System von $2n$ Freiheitsgraden, dessen Zustand zu jeder Zeit t durch $2n$ kanonische Koordinaten, und zwar n Lagekoordinaten

$$q_1, q_2, q_3 \dots q_n$$

und n zugehörige Impulskoordinaten

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}; \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'}; \dots \quad p_n = \frac{\partial T}{\partial q_n'}$$

bestimmt wird, wo T die kinetische Energie des Systems und q_i' die Derivierte von q_i nach der Zeit bedeutet. Wenn das betrachtete mechanische System ein einzelner Stern ist, wird die Anzahl der *Freiheitsgrade* $2n = 6$ sein, und wir haben drei räumliche Koordinaten zur Festlegung seiner Lage und drei zugehörige Impulskoordinaten, zur Charaktersierung seines Bewegungszustandes. Nun lauten bekanntlich die Bewegungsgleichungen der Mechanik in kanonischen Variablen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{88}$$

wo H die *Hamilton'sche Funktion* bezeichnet, die in dem hier vorliegenden Spezialfalle, daß die potentielle Energie U ausschließlich von den Lagekoordinaten q_i abhängt, die Form

$$H = T + U \tag{89}$$

annimmt. Setzen wir in den Gleichungen (88)

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = Q_i; \quad -\frac{\partial H}{\partial q_i} = P_i, \tag{90}$$

so nehmen sie eine Form an, die mit derjenigen der Gleichungen (75) identisch ist, wobei die Größen Q_i, P_i, die nun an die Stelle der Geschwindigkeitskomponenten X, Y, Z getreten sind, ebenso wie diese, die Zeit nicht explicite enthalten und dazu auch noch die «Inkompressibilitätsbedingung» (76) erfüllen, denn es ist, wie leicht einzusehen, wegen (90)

$$\Sigma \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} + \Sigma \frac{\partial P_i}{\partial p_i} = 0 . \qquad (91)$$

Wir können daher die Größen $q_1, q_2 \ldots q_n, p_1, p_2 \ldots p_n$ als die $2n$ kartesischen Koordinaten eines materiellen Teilchens in einem $2n$-dimensionalen Raume auffassen, dessen Geschwindigkeitskomponenten dann die durch (88) und (90) definierten Größen $Q_1, Q_2 \ldots Q_n, P_1, P_2 \ldots P_n$ sind. Wegen der von letzteren erfüllten Inkompressibilitätsbedingung können wir uns unser mit $2n$ Freiheitsgraden ausgestattetes Teilchen als in einer fiktiven Flüssigkeit schwebend vorstellen. Betrachten wir nun nicht ein, sondern sehr viele solche Systeme $S_1, S_2, S_3 \ldots$, und deuten sie in der eben dargelegten Weise als in einer Flüssigkeit schwebende Teilchen, dann sehen wir uns gerade in den früher untersuchten Fall der beiden sich durchmischenden Flüssigkeiten zurückversetzt, dessen Ergebnisse sich somit auf beliebig viele Freiheitsgrade übertragen lassen. Es muß also auch im Spezialfalle, wenn die Gesamtheit unserer Systeme S_i sich in einem zeitlich unveränderlichen, stationären Zustande befindet, die $2n$-dimensionale «räumliche Dichte», die wir hier, da sie auch von den Impulskoordinaten abhängt, wieder als die Verteilungsfunktion f ansprechen wollen, längs der ganzen Bahnkurve eines einzelnen Systems im $2n$-dimensionalen Raume konstant bleiben. Wenn also die Bahn eines einzelnen Teilchens den ganzen verfügbaren $2n$-dimensionalen Raum ausfüllt, wird die Bedingung

$$f(q_1, q_2 \ldots q_n, p_1, p_2 \ldots p_n) = \text{const.}$$

überall erfüllt sein müssen. In diesem Falle würden aber alle Integrale des kanonischen Gleichungssystems (88) unendlich vieldeutig sein, denn jede Bahn muß dann die Eigenschaft haben, an jeden beliebigen Punkt des $2n$-dimensionalen Kontinuums beliebig nahe heranzukommen, wofür uns die Lissajous'sche Kurve (81) in drei Dimensionen ein anschauliches Beispiel gibt. Ein solches dynamisches System wird, nach dem Vorschlage von T. LEVI-CIVITA[7]) ein primitives genannt.

Haben die Bahnkurven dagegen die Eigenschaft, daß jede von ihnen ganz in einem $(2n-1)$-dimensionalen Hyperraume enthalten ist, dann besteht zwischen den Variablen $q_1, q_2 \ldots q_n, p_1, p_2 \ldots p_n$ eine holonome, nicht unendlich-vieldeutige Beziehung

$$I_1(q_1, q_2 \ldots q_n, p_1, p_2 \ldots p_n) = \text{const.} . \qquad (92)$$

[7]) T. LEVI-CIVITA, A general Survey of the Theory of Adiabatic Invariants, Journ. of Math. and Phys. *13*, S. 18, (1934). Vgl. auch derselbe, Drei Vorlesungen über adiabatische Invarianten, Hamburg, Abh. aus dem math. Seminar der Universität, 6 (1928), S. 323 und G. PRANGE, Die allgemeinen Integrationsmethoden der Analytischen Mechanik, in Encykl. der math. Wissenschaft. Bd. IV, 2. Teilbd. Art. 12 und 13, S. 685. Diesen Literaturnachweis verdanke ich Herrn DR. M. SCHÜRER in Bern.

durch die im $2n$-dimensionalen Raume eine Schar von $(2n-1)$-dimensionalen Räumen definiert wird. Ein solches Integral ist in einem konservativen System das Energieintegral, und ein solches System heißt, wenn dieses das einzige nicht unendlich-vieldeutige Integral des Systems ist, ***einfach imprimitiv,*** (die Anzahl der nicht unendlich-vieldeutigen Integrale wird als die «Imprimitivitätsordnung» des mechanischen Systems bezeichnet). In diesem Falle füllen die Bahnkurve die durch (92) definierten $(2n-1)$-dimensionalen Räume vollständig aus, und es ist ein neuer stationärer Zustand dadurch gegeben, daß man dem f innerhalb eines jeden solchen Raumes, also für jeden Wert der Konstanten in (92) einen konstanten, an sich beliebig wählbaren Wert erteilt. Der allgemeinste Ausdruck der Verteilungsfunktion für den stationären Zustand beim Bestehen eines Integrals (92) ist daher

$$f = F\,(I_1), \tag{93}$$

wo F eine willkürliche Funktion von I_1 bezeichnet. Werden dagegen auch die $(2n-1)$-dimensionalen Räume (92) von den Bahnkurven (die in ihnen ganz enthalten sind) nicht vollständig ausgefüllt, dann liegen diese Bahnkurven eventuell ganz in Räumen von $(2n-2)$ Dimensionen, die durch die Schnitte der durch (92) definierten Schar von Räumen mit einer anderen, durch einen neuen holonomen, nicht unendlich-vieldeutigen Ausdruck in den Koordinaten

$$I_2\,(q_1, q_2 \ldots q_n, p_1, p_2 \ldots p_n) = \text{const.} \tag{94}$$

definierten Schar gegeben sind. Füllen die Bahnkurven diese $(2n-2)$-dimensionalen Räume nun vollständig aus, so ist unser System *zweifach-imprimitiv,* und wir haben einen weiteren stationären Zustand, wenn wir der Funktion f innerhalb eines jeden solchen $(2n-2)$-dimensionalen Raumes, also für jedes Wertepaar der Konstanten in (92) und (94) einen konstanten, an sich ganz beliebigen Wert erteilen. Die allgemeinste Verteilungsfunktion ist daher für diesen stationären Zustand, in analoger Weise wie früher

$$f = F(I_1, I_2), \tag{95}$$

wo F wieder eine willkürliche Funktion, diesmal von I_1 und I_2 bezeichnet. Die allgemeine Regel ist nun hinreichend klar:

Sind die dynamischen Bedingungen, unter denen sich ein System Σ von sehr vielen Systemen S_i von je $2n$ Freiheitsgraden befindet, so beschaffen, daß die «Bahnkurven» (im verallgemeinerten Sinne, also die Inbegriffe der n Lagekoordinaten und der n Impulskoordinaten als Funktionen der Zeit) dieser Systeme in Räumen von weniger als $2n$ Dimensionen, also etwa von $(2n-k)$ Dimensionen, ganz enthalten sind, die sie nun aber vollständig ausfüllen, dann gibt es k, und nicht mehr als k, voneinander unabhängige holo-

nome, nicht unendlich-vieldeutige Beziehungen zwischen den Koordinaten und den Impulsen $q_1, q_2 \ldots q_n, p_1, p_2 \ldots p_n$ dieser Systeme,

$$I_1 = \text{const.};\ I_2 = \text{const.};\ \ldots I_k = \text{const.},$$

also k erste Integrale der Bewegungsgleichungen des einzelnen Systems S_i, durch die diese $(2n\text{-}k)$-dimensionalen Räume genau festgelegt werden, und die stationären Zustände des Gesamtsystems sind durch Verteilungsfunktionen der allgemeinen Form

$$f = F(I_1, I_2, \ldots I_k)$$

darstellbar.

Natürlich darf k nicht größer als $2n$-1 sein. Wenn die Systeme $S_1 \ldots$ Sterne sind, ist $n = 3$, die Anzahl der Freiheitsgrade $2n = 6$, und die größte Anzahl von einander unabhängiger Integrale gleich 5.

Hiermit ist auch die Antwort auf die S. 49 gestellte Frage gegeben, betreffend die Beschaffenheit der Integrale, die als Argumente der Verteilungsfunktion f für stationäre Zustände in Frage kommen. Es sind natürlich nur die nicht unendlich-vieldeutigen Integrale des mechanischen Systems, durch die der Grad seiner Imprimitivität bestimmt wird, und zwar kommt es, wie oben dargelegt, nicht auf ein bestimmtes System von Beziehungen (92), (94) usw. an, sondern ausschließlich darauf, daß durch ihre Gesamtheit ein Raum von weniger als 6 Dimensionen innerhalb des durch die drei Lagekoordinaten und die drei Impulskoordinaten definierten sechsdimensionalen Raumes so umgrenzt wird, daß die Bahnkurven der einzelnen Sterne in ihm ganz enthalten sind und ihn überalldicht erfüllen. Dieser $(2n\text{-}k)$-dimensionale Raum ist in unserem Problem das Primäre, durch die dynamischen Bedingungen Gegebene; in welcher Weise seine Abgrenzung geschieht ist unwesentlich und eine Frage der praktischen Bequemlichkeit, wie ja die Wahl der voneinander unabhängigen Integrale eines Differentialgleichungssystems, aus denen sich alle anderen Integralverbindungen durch Kombination aufbauen, von rein praktischen Erwägungen abhängt. In einem stationären Sternsystem mit dem zeitunabhängigen Potentiale V muß z. B. selbstverständlich das Energie-Integral

$$I_1 = u^2 + v^2 + w^2 - 2V = \text{const.}$$

gelten, wodurch schon in dem oben betrachteten sechsdimensionalen Raume ein fünfdimensionales Kontinuum abgegrenzt wird, das alle Sternbahnen (im erweiterten Sinne) enthalten muß. Es ist aber keineswegs notwendig, daß dieses Integral in der Verteilungsfunktion eines jeden konservativen Systems unbedingt als Argument auftritt. Denken wir uns, das System habe die Gestalt eines homogenen Ellipsoids mit den drei Achsen a, b, c, dann läßt

sich bekanntlich sein Potential sofort angeben und wird durch den Ausdruck

$$V = -\left(\frac{A^2}{2}x^2 + \frac{B^2}{2}y^2 + \frac{C^2}{2}z^2\right) + D$$

gegeben, wo A, B, C gewisse Konstanten bedeuten, die von a, b, c abhängen. Die Bewegungsgleichungen eines Systemsternes sind in diesem Falle

$$x'' = \frac{\partial V}{\partial x} = -A^2 x\,; \quad y' = \frac{\partial V}{\partial y} = -B^2 y\,; \quad z'' = \frac{\partial V}{\partial z} = -C^2 z\;,$$

und es lassen sich auch sofort drei erste Integrale dieser Gleichungen angeben, die wegen der Beziehungen

$$x' = u\,; \quad y' = v\,; \quad z' = w$$

in der Form

$$E_1 \equiv u^2 + A^2 x^2 = \text{const.}\,; \quad E_2 \equiv v^2 + B^2 y^2 = \text{const.}\,; \quad E_3 \equiv w^2 + C^2 z^2 = \text{const.}$$

geschrieben werden können. Wie eine eingehendere Untersuchung, die hier nicht wiedergegeben werden soll, gezeigt hat[8]), wird durch diese drei Hyperflächen schon der dreidimensionale Raum festgelegt, der die Bahnen (im erweiterten Sinne) ganz enthält, so daß die allgemeine Verteilungsfunktion für Systeme dieser Art, wenn sie in stationärem Zustande sind, in der Form

$$f = F(u^2 + A^2 x^2, v^2 + B^2 y^2, w^2 + C^2 z^2)$$

geschrieben werden kann. Wir sehen, daß die Summe dieser drei Integrale gerade das Energieintegral ergibt, so daß letzeres in dem durch die drei Integrale abgegrenzten Raume sozusagen automatisch erfüllt wird; wir hätten also diesen Raum auch mit Hilfe des Energieintegrals und zweier anderer Integrale abgrenzen können, jedoch dürfte die hier gegebene Art, dies zu tun, mathematisch bei weitem die bequemere sein.

Wir bemerken, daß die oben angestellten Überlegungen zur Veranschaulichung der Bedeutung des Lösungsansatzes (73) der Grundgleichung der Stellardynamik im Falle eines stationären Zustandes auch leicht auf den nicht-stationären Fall übertragen werden können; wir brauchen uns hierzu nur die in Gleichungen (68) eingehenden Größen x, y, z, u, v, w und t mit Hilfe eines Parameters τ ausgedrückt zu denken und an Stelle der erweiterten Bahnkurve eines Systemteilchens seine «erweiterte» Weltlinie in einem achtdimensionalen Raume (in dem die achte Koordinate durch $t' = \frac{dt}{d\tau}$ gegeben wird) zu betrachten. Die ersten Integrale des Systems (68), die von τ unabhängig sind, definieren dann den Raum, in dem die Weltlinien ganz enthalten sein müssen, wodurch der Lösungsansatz (69) in derselben Weise wie (73) motiviert werden kann.

---

[8]) K. Schwarzschild, Probleme der Astronomie (Seeliger-Festschrift) S. 102 (1924), J.H. Jeans, M.N. 76, 70 (1916).

Stationäre Fälle beim Bestehen verschiedener Symmetrieeigenschaften Sternströmung

Wenn das Potential V eines in stationärem Zustande befindlichen Sternsystems gewisse Symmetrieeigenschaften aufweist, können diese auf die Dauer nur dadurch erhalten bleiben, daß sich die Bewegungsverhältnisse der Sterne in irgend einer Weise den in ihnen enthaltenen einschränkenden Bedingungen anpassen. Durch die Symmetrieeigenschaften der Potentialfunktion wird also auch die Geschwindigkeitsverteilung der Sterne im System bis zu einem gewissen Grade mitbedingt, und wir wollen uns nun der Betrachtung der verschiedenen hier möglichen allgemeinen Fälle und der ihnen entsprechenden *Geschwindigkeitskörper* zuwenden. Hierbei wollen wir die zu untersuchenden Sternsysteme nach der Anzahl der in ihre Verteilungsfunktionen als Argumente eingehenden Integralkombinationen der Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten (ersten Integrale der Bewegungsgleichungen) ordnen.

1. Die Funktion f hängt von einem Integrale I_1 ab.

Da in einem konservativen System die Bewegungsgleichungen immer das Energieintegral

$$I_1 = u^2 + v^2 + w^2 - 2V \text{ const.} \tag{96}$$

befriedigen werden, muß also in dem hier betrachteten Falle die Verteilungsfunktion eine Funktion von diesem Integrale allein sein, und somit die Form

$$f = f(I_1) = F(u^2 + v^2 + w^2 - 2V) \tag{97}$$

haben. Beschränken wir uns auf die Betrachtung irgend eines Punktes x, y, z des Systems, halten also auch den Wert von V fest, so sehen wir, daß die Geschwindigkeitsverteilung an jeder Stelle des Systems eine kugelsymmetrische sein muß, daß also die Flächen gleicher Häufigkeit im Geschwindigkeitskörper konzentrische Kugeloberflächen sind und mithin keine Richtung im Raume vor den anderen ausgezeichnet erscheint. In diesem Falle ist also keine Sternströmung zu beobachten, die ja gerade darin besteht, daß die Häufigkeit der Sterngeschwindigkeiten in gewissen Richtungen — den sog. Stromrichtungen — größer ist, als in allen übrigen. Über die räumliche Sternverteilung, die der Häufigkeitsfunktion (97) entspricht, kann zunächst aus ihrer Form nichts geschlossen werden, sie könnte an sich beliebig sein; nicht mehr aber, wenn für die Verteilungsfunktion außer der Grundgleichung (71) auch noch eine zweite, durch die POISSONsche Gleichung (64) oder (65) ausgedrückte einschränkende Bedingung besteht. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß alle Sterne des Systems die gleiche Masse M haben, setzen unsere Verteilungsfunktion (97) in die Gleichung (64) ein, und denken

uns die Integration nach den Geschwindigkeitskomponenten u, v, w ausgeführt, so sehen wir, daß die räumliche Dichte ν der Sterne eine reine Funktion des Potentials V, also

$$\nu = \varphi(V) \tag{98}$$

sein muß, und daß mithin in dem hier betrachteten Falle die Flächen gleicher räumlicher Sterndichte mit den Äquipotentialflächen zusammenfallen. Die POISSONsche Gleichung nimmt hier die speziellere Form an

$$\nabla^2 V = -4\pi \varkappa^2 M \nu(V) \ . \tag{99}$$

Es darf in diesem Zusammenhang daran erinnert werden, daß Gleichung (98) von der Theorie der Gleichgewichtsfiguren kompressibler Massen her bekannt ist, in der letztere gerade durch eine Beziehung dieser Form zwischen Dichte und Potential charakterisiert werden [9]. Dort ist die einzig mögliche Lösung, wenn das Potential V ausschließlich von den das System bildenden Massen herrührt eine sphärisch-symmetrische Anordnung, bei der sowohl V als $\nu \cdot M$ (die räumliche Dichte der gravitierenden Materie) reine Funktionen des Abstandes r vom Mittelpunkte sind. JEANS glaubt daraus den Schluß ziehen zu können, daß ein Sternsystem, das überhaupt keine Symmetrieeigenschaften besitzt, sich niemals in einem stationären Zustande befinden kann. Wie dem auch sei, stellt die Geschwindigkeitsverteilung in (97) in der Praxis sicher das letzte, endgültige Ergebnis einer langen Entwicklung dar, bei der alle lokalen Verschiedenheiten und früher etwa vorhandenen Strömungen (bevorzugte Bewegungsrichtungen der Sterne) durch die Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Sternen bereits vollständig ausgeglichen und verwischt erscheinen.

2. Achsensymmetrische Systeme.

Wenn die Potentialfunktion V Symmetrie um eine einzige Achse zeigt, die wir zur Z-Achse unseres Koordinatensystems wählen wollen, dann darf V natürlich nur von z und dem Abstande $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ von dieser Achse abhängen, und das Gleichungssystem (72) nimmt daher die Form an

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{du}{\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{x}{r}} = \frac{dv}{\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{y}{r}} = \frac{dw}{\frac{\partial V}{\partial z}} \ .$$

Dieses System läßt aber, wegen der aus ihm folgenden Beziehungen

$$v\,dx - u\,dy = 0 \ ; \quad x\,dv - y\,du = 0$$

[9]) Vgl. J. H. JEANS. Astronomy and Cosmogony, Kapitel 8, (1928).

wie sofort zu ersehen, das Integral

$$I_2 = xv - yu = \text{const.} \tag{100}$$

zu, welches die Tatsache zum Ausdrucke bringt, daß für die Projektion des Radiusvektors eines Sternes auf eine zur Symmetrieachse Z senkrechte Ebene der Flächensatz gilt. Da das Energieintegral für diesen Fall natürlich seine Gültigkeit behält, haben wir nun zwei Integrale I_1 und I_2 der Bewegungsgleichungen, die durch (97) bzw. (100) gegeben sind, und der allgemeinste Ausdruck für die Verteilungsfunktion eines achsensymmetrischen Sternsystems ist daher nach dem JEANS-CHARLIERschen Theorem von der Form:

$$f = F(I_1, I_2), \tag{101}$$

wo F, wie gewöhnlich, eine willkürliche Funktion bedeutet.

Um diesen Fall etwas genauer zu studieren, ist es natürlich am zweckmäßigsten, sich eines zylindrischen Koordinatensystems zu bedienen, dessen

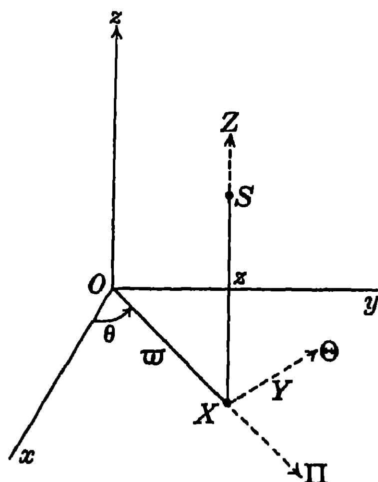


Abb. 3
Die Geschwindigkeitskomponenten in einem zylindrischen Koordinatensystem.

Z-Achse mit der Symmetrieachse des Systems zusammenfällt. Wir bezeichnen daher im weiteren die räumlichen Koordinaten eines Sternes mit

$$\varpi \quad \vartheta \quad z\,,$$

wobei der Abstand eines Punktes von der Z-Achse also nicht, wie meistens üblich durch r, sondern durch ϖ (der griechische Buchstabe «Pi») bezeichnet werden soll. Die den drei hierdurch definierten Richtungen parallelen *linea-*

ren Komponenten der Geschwindigkeit eines Sternes bezeichnen wir mit den entsprechenden großen griechischen Buchstaben (s. Abb. 3)

$$\Pi \quad \Theta \quad Z \,.$$

Diese von J. H. Jeans zuerst eingeführte Bezeichnungsweise ist in der modernen Literatur allgemeingebräuchlich geworden, weshalb sie auch hier durchweg verwendet werden soll.

Die beiden Integrale I_1 und I_2 sind in diesem Koordinatensystem durch die Ausdrücke gegeben

$$I_1 = \Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 - 2V(\varpi, z) = \text{const.} \tag{102}$$

und

$$I_2 = \varpi \Theta = \text{const.} \tag{103}$$

und die Verteilungsfunktion (101) nimmt demnach die Form an

$$f = F(\Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 - 2V, \varpi \Theta) \,. \tag{104}$$

Wie in (102) angedeutet, ist im Falle eines achsensymmetrischen Systems das Potential V eine Funktion von ϖ und z allein, und darf von dem «Azimuthwinkel» ϑ nicht abhängen.

Aus dem Ausdrucke (104) für die Verteilungsfunktion f sehen wir, daß die Geschwindigkeitskomponenten Π und Z in diese Funktion ganz symmetrisch eingehen, während die Komponente Θ ein anderes Verhalten zeigt. An jeder Stelle des Systems ist also immer nur eine Richtung ausgezeichnet, und zwar die Richtung, welche auf dem aus dem betrachteten Punkte auf die Symmetrieachse gefälltem Lote senkrecht steht und in der zu dieser Achse normalen Ebene liegt. *Um diese Θ-Achse (im Geschwindigkeitsraume) muß die Verteilung der Geschwindigkeiten notwendig eine symmetrische sein.* Dies bedeutet an sich natürlich noch nicht, daß längs dieser ausgezeichneten Richtung unbedingt eine Strömung der Sterne stattfinden muß, denn die Symmetrieachse, die der Geschwindigkeitskörper in dem hier betrachteten achsensymmetrischen Sternsystem notwendig haben muß, kann ebensogut einer maximalen, wie auch einer minimalen Häufigkeit der Sterngeschwindigkeiten entsprechen. Solange nichts weiteres über die Beschaffenheit des Sternsystems bekannt ist, kann auch über die Geschwindigkeitsverteilung in ihm, außer dieser einen Symmetrieeigenschaft des Geschwindigkeitskörpers, keine weitere Aussage gemacht werden.

Um uns mit diesem achsensymmetrischen Fall, der wie wir später sehen werden, gerade in der Theorie unseres Galaktischen Systems eine ausschlaggebende Rolle spielen wird, etwas vertrauter zu machen, wollen wir schon hier die rein theoretische Untersuchung einen Schritt weiter führen, indem wir eine durch die Erfahrung nahegelegte Spezialisierung der Gestalt des Geschwindigkeitskörpers vornehmen. Es hat sich bekanntlich aus dem ein-

gehenden Studium der Eigenbewegungen und Radialgeschwindigkeiten der Sterne in der Umgebung der Sonne herausgestellt, daß diese Sterne die Neigung zeigen, bei ihrer Bewegung eine gewisse, wenigstens innerhalb des den Beobachtungen zugänglichen Teiles unseres Systems, im Raume feste Richtung zu bevorzugen, die als die *Vertexrichtung* bezeichnet wird. Diese bei den Sternen festgestellte Tendenz, sich überwiegend in der Vertexrichtung (und zwar mit nahezu gleicher Häufigkeit in beiden Richtungen, nach dem Vertex und nach dem Anti-Vertex) zu bewegen, kann durch einen langgestreckten Geschwindigkeitskörper dargestellt werden, der bekanntlich sowohl durch Überlagerung zweier gegeneinander in der Vertexrichtung verschobener MAXWELLscher Geschwindigkeitsverteilungen — EDDINGTONS Zweistromtheorie —, als auch durch eine einzige Exponentialfunktion, deren Exponent ein quadratischer Ausdruck in den Geschwindigkeitskomponenten ist und einem Rotationsellipsoid mit in der Vertexrichtung liegender größter (Rotations)-Achse entspricht — SCHWARZSCHILDsche Ellipsoidentheorie — approximiert werden kann. Da gerade letztere Auffassung den Vorteil einer großen Übersichtlichkeit und Einfachheit der mathematischen Formulierung bietet, ist sie bis jetzt bei den meisten theoretischen Untersuchungen verschiedener Typen von Sternsystemen als bequeme erste Näherung benutzt worden, jedoch in der etwas allgemeineren Form, daß der Geschwindigkeitskörper durch *irgendeine* Funktion $F(Q)$ eines allgemeinen quadratischen Ausdruckes

$$Q = A\Pi^2 + B\Theta^2 + CZ^2 + 2F\Theta Z + 2GZ\Pi + 2H\Pi\Theta + K\Pi + L\Theta + MZ + N$$

in den Geschwindigkeitskomponenten, in dem die Koeffizienten $A, B, C, F, G, H, K, L, M, N$ noch Funktionen der Raumkoordinaten sein können, dargestellt werden kann. Eine solche Geschwindigkeitsverteilung pflegt man einen *Geschwindigkeitskörper vom erweiterten oder verallgemeinerten Schwarzschild'schen Typus* zu nennen.

Die Verteilungsfunktion f muß unter der soeben eingeführten Annahme eine Funktion nur eines einzigen Argumentes sein, das einerseits ein quadratischer Ausdruck in Π, Θ, Z ist, andererseits wegen (104) eine Kombination der beiden Integrale I_1, I_2 darstellen muß. Die allgemeinste Kombination dieser Integrale, die der gestellten Forderung genügt, wird nun durch den Ausdruck

$$Q = I_1 + 2k_1 I_2 + k_2 I_2^2 \tag{105}$$

gegeben, wo k_1 und k_2 zwei von Π, Θ, Z unabhängige Größen sind, die noch als Funktionen der Lagekoordinaten ω, z gedacht werden können. Setzen wir hierin die Ausdrücke (102) und (103) für I_1 und I_2 ein, und bedenken, daß der Ausdruck

$$\Theta^2(1 + k_2\varpi^2) + 2k_1\varpi\Theta - 2V$$

in der Form

$$\lambda^2(\Theta - \Theta_0)^2 - 2V_1$$

geschrieben werden kann, wo

$$\lambda^2 = 1 + k_2\varpi^2\,; \quad \Theta_0 = -\frac{k_1\varpi}{1 + k_2\varpi^2}\,; \quad V_1 = V + \frac{1}{2}\frac{k_1^2\varpi^2}{1 + k_2\varpi^2} \tag{106}$$

ist, dann erhalten wir für die Verteilungsfunktion die Darstellung:

$$f = F(Q)$$
$$Q = \Pi^2 + \lambda^2(\Theta - \Theta_0)^2 + Z^2 - 2V_1\,. \tag{107}$$

Hier bedeuten λ, Θ_0, V_1 Funktionen der Lagekoordinaten ϖ, z.

Wir sehen aus den Formeln (107), daß im Falle einer verallgemeinerten SCHWARZSCHILDschen Geschwindigkeitsverteilung die Bewegungen der Sterne in einem achsensymmetrischen Sternsystem im stationären Zustande an jeder Stelle durch die Überlagerung einer allgemeinen Rotationsgeschwindigkeit vom Betrage Θ_0 um die Symmetrieachse des Systems und einer ellipsoidischen Verteilung der «Restgeschwindigkeiten» dargestellt werden kann, wobei die Flächen gleicher Häufigkeit dieser nach Abzug der Rotationsgeschwindigkeit Θ_0 sich ergebenden Restgeschwindigkeiten

$$\Pi\,, \quad \Theta' = \Theta - \Theta_0\,, \quad Z \tag{108}$$

die Gestalt von Rotationsellipsoiden um die zu den Richtungen von ϖ und z in jedem Punkte senkrechte Richtung Θ haben, und das Verhältnis der längs der Π-, Θ- und Z-Achse liegenden Ellipsoidenachsen bzw. gleich

$$1 : \frac{1}{\lambda} : 1 \tag{109}$$

ist. Wenn $k_2 < 0$ ist, haben wir es also mit einem ausgestreckten Ellipsoid zu tun, und es ist tatsächlich eine Richtung vorhanden, in der *auch für den an der Rotation teilnehmenden Beobachter* die Sterne des Systems (in beiden Richtungen) zu «strömen» scheinen werden. Ist dagegen $k_2 > 0$, dann ist das Geschwindigkeitsellipsoid ein abgeplattetes, und die größte Beweglichkeit der Sterne findet in der zur Θ-Richtung senkrechten Ebene statt; in diesem Falle ist es unmöglich, von einer Strömung zu sprechen, denn es gibt zwar noch *eine* ausgezeichnete Bewegungsrichtung für die Sterne des Systems, diese fällt aber mit einem Minimum der Häufigkeit der Sterngeschwindigkeiten zusammen. Wenn schließlich $k_2 = 0$ ist, nimmt das Argument der Verteilungsfunktion die einfachere Form

$$Q = I_1 + 2k_1 I_2 = \Pi^2 + (\Theta - \Theta_0)^2 + Z^2 - 2V_1 \tag{110}$$

an, und wir sehen aus (106), daß in diesem Falle wohl noch eine allgemeine Rotationsgeschwindigkeit vom Betrage

$$\Theta_0 = -k_1 \varpi$$

an jeder Stelle des Systems bestehen bleibt, daß aber die Verteilung der Restgeschwindigkeiten nunmehr eine kugelsymmetrische geworden ist, so daß für den an der Rotation teilnehmenden Beobachter überhaupt keine Bewegungsrichtung mehr ausgezeichnet erscheint und er keinerlei Sternströmung wahrnehmen wird. Um leicht entstehenden Mißverständnissen vorzubeugen soll in diesem Zusammenhange auf einen Sprachgebrauch hingewiesen werden, der sich bei der Behandlung von Bewegungszuständen, die durch eine verallgemeinerte SCHWARZSCHILDsche Geschwindigkeitsverteilung dargestellt werden können, allgemein eingebürgert hat, für den Anfänger aber oft irreführend sein kann. Der allgemeinste quadratische Ausdruck in den Geschwindigkeitskomponenten

$$Q = A\Pi^2 + B\Theta^2 + CZ^2 + 2F\Theta Z + 2GZ\Pi + 2H\Pi\Theta + K\Pi + L\Theta + MZ + N$$

kann natürlich immer auf die Form

$$Q = a(\Pi - \Pi_0)^2 + b(\Theta - \Theta_0)^2 + c(Z - Z_0)^2 + 2f(\Theta - \Theta_0)(Z - Z_0) + \\ + 2g(Z - Z_0)(\Pi - \Pi_0) + 2h(\Pi - \Pi_0)(\Theta - \Theta_0) + \sigma \qquad (111)$$

gebracht werden, der die Überlagerung einer räumlichen Strömung aller Sterne eines Raumgebietes mit den Komponenten

$$\Pi_0 \quad \Theta_0 \quad Z_0 \qquad (112)$$

und einer ellipsoidischen Verteilung der nach Abzug dieser Gruppengeschwindigkeit verbleibenden «Restgeschwindigkeiten»

$$\Pi - \Pi_0 \qquad \Theta - \Theta_0 \qquad Z - Z_0 \qquad (113)$$

darstellt. Nun wird aber meistens die Geschwindigkeit (112) nicht als «Sternströmung» bezeichnet, sondern als die «Geschwindigkeit des lokalen Zentroids», oder mit einem ähnlichen Namen, der die Tatsache zum Ausdrucke bringen soll, daß sich an jeder Stelle des Systems ein Koordinatensystem definieren läßt, in dem die Gesamtheit der in einem kleinen Volumenelemente enthaltenen Sterne als ruhend betrachtet werden kann. Das Vorhandensein eines solchen «Lokalen Ruhestandards» bildet genau in demselben Sinne eine Voraussetzung über die Beschaffenheit des Sternsystems, wie auch die von uns seinerzeit gemachte Annahme, daß es für dieses eine Verteilungsfunktion f gibt, die die von uns ihr zugeschriebenen mathematischen Eigenschaften besitzt. Dagegen wird die Bezeichnung «Sternströmung» gewöhn-

lich für die, auch von einem sich mit der Geschwindigkeit (112) im System mitbewegenden Beobachter feststellbaren, Inhomogenitäten in der Verteilung der «Restgeschwindigkeiten» (113) reserviert, und namentlich für den Fall, daß der durch (111) ausgedrückte relative «Geschwindigkeitskörper» eine Achse besitzt, längs der die Häufigkeit der Bewegung der betrachteten Sterne besonders groß ist.

Aus der zweiten der Formeln (106) sehen wir, daß wenn $k_2 < 0$ ist, die *Winkelgeschwindigkeit* der Rotation des Systems, die an jeder Stelle durch die Beziehung

$$\omega = \frac{\Theta_0}{\varpi} \tag{114}$$

gegeben wird, von der Mitte des Systems nach außen zunimmt; ist dagegen $k_2 > 0$, dann nimmt die Winkelgeschwindigkeit nach außen ab. Für $k_2 = 0$ schließlich hat die Winkelgeschwindigkeit in allen Entfernungen von der Rotationsachse immer denselben Wert. In diesem Falle, in dem auch die Verteilung der Restgeschwindigkeiten eine kugelsymmetrische ist, also nach dem oben gesagten ***keine Sternströmung*** mehr beobachtet wird, rotiert das Sternsystem (statistisch gesprochen) ***wie ein fester Körper***. Dieser Fall entspricht einem schon vorgeschrittenen Stadium in der Entwicklung eines Sternsystems, in dem die auf S. 48 erwähnten Kräfte A, die von den Begegnungen zwischen benachbarten Sternen herrühren, und unter deren Einwirkung allein das System von einem Gleichgewichtszustande (in bezug auf die Kräfte B) zu einem anderen übergehen kann, die in den früheren Stadien meistens auftretenden inneren Sternströmungen praktisch schon vollständig ausgeglichen haben. Das Endstadium des ***thermodynamischen Gleichgewichts,*** das wie dort schon erwähnt, nur von einem System unendlich großer Masse erreicht werden könnte, ist durch die Verteilungsfunktion charakterisiert[10])

$$f(I_1, I_2) = A e^{-hM(I_1 + 2\omega I_2)} \quad ,$$

in der A, h und ω Konstanten sind und M wie früher die Masse des einzelnen Sternes bezeichnet. In dem hier benutzten zylindrischen Koordinatensystem lautet dieser Ausdruck, wegen (102, (103), (114)

$$f(I_1, I_2) = A e^{-hM[\Pi^2 + (\Theta - \Theta_0)^2 + Z^2] + 2hM[V + \frac{1}{2}\Theta_0^2]} \quad ,$$

Hier bedeutet der zweite Summand im Exponenten von e das Gesamtpotential, das natürlich in diesem Falle durch die Summe des Gravitationspotentials und des Potentials der Zentrifugalkraft gegeben wird. Wir sehen, daß die Restgeschwindigkeiten Π, $\Theta - \Theta_0$, Z, nach dem MAXWELLschen Gesetze verteilt sind. Die räumliche Dichte $\varrho = M\nu$, die durch Integration der Funktion

---

[10]) Siehe J. H. JEANS, Dynamical Theory of Gases, §§ 107, 113, (1925) 4. Auflage.

f nach den Geschwindigkeitskomponenten über alle möglichen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ erhalten wird, ist im Falle thermodynamischen Gleichgewichts

$$\varrho = C\, e^{2hM[V + \frac{1}{2}\omega^2 \varpi^2]} ,$$

wo C wieder eine Konstante ist; die Flächen gleicher Sterndichte werden also in diesem Falle, wie bei einer rotierenden Gasmasse, durch die Gleichungen

$$V + \tfrac{1}{2}\,\omega^2 \varpi^2 = V + \tfrac{1}{2}\,\omega^2 (x^2 + y^2) = \text{const.}$$

gegeben. Gleichzeitig sehen wir aus dem obenstehenden Ausdrucke für die räumliche Dichte, daß letztere im Unendlichen einen unendlich großen Wert haben müßte, und auch bei Abwesenheit einer Rotation ($\omega = 0$), in unendlichen Entfernungen vom Mittelpunkt immer noch endliche Werte besitzen würde. Wenn die Masse des Systems eine endliche ist, kann dieser Fall daher praktisch niemals realisiert werden, und es muß die auf S. 48 erwähnte Verödung eintreten.

Was nun die räumliche Dichte der Sterne in einem achsensymmetrischen Sternsysteme betrifft, das sich in irgendeinem stationären Zustande befindet, der, wie wir gesehen haben, nicht mit dem Zustande des thermodynamischen Gleichgewichts übereinzustimmen braucht, so ist sie, nach (50),

$$\nu = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(Q)\, d\Pi\, d\Theta\, dZ , \tag{114}$$

wo in der Verteilungsfunktion F an Stelle von Q der Ausdruck (107) eingesetzt gedacht werden muß. Wenn wir die Abkürzung

$$\Theta_1 = \lambda(\Theta - \Theta_0) \tag{115}$$

einführen und

$$\Pi^2 + \Theta_1^2 + Z^2 = c_1^2 \tag{116}$$

setzen, dann wird (114)

$$\nu = \frac{1}{\lambda} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(c_1^2 - 2V_1)\, d\Pi\, d\Theta_1\, dZ , \tag{117}$$

und wir sehen, daß nunmehr die Variablen in F nur noch in der «sphärischen» Verbindung (116) vorkommen. Unter Benutzung der in Fußnote [8]) auf S. 30 angegebenen Koordinatentransformation läßt sich nun die Integration nach zwei Variablen in den dort angegebenen Grenzen leicht ausführen, und wir erhalten

$$\nu = \frac{4\pi}{\lambda} \int\limits_0^{\infty} F(c_1^2 - 2V_1)\, c_1^2\, dc_1 . \tag{118}$$

In ganz ähnlicher Weise berechnen sich die Mittelwerte der drei (symmetrischen) Komponenten Π, Θ_1, Z, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, zu

$$\overline{\Pi} = \overline{\Theta_1} = \overline{Z} = \frac{\int\limits_0^\infty F(c_1^2 - 2V_1)\, c_1^3\, dc_1}{\int\limits_0^\infty F(c_1^2 - 2V_1)\, c_1^2\, dc_1} \tag{119}$$

und wir sehen auf Grund von (115), daß die Mittelwerte der drei relativen Geschwindigkeitskomponenten $\overline{\Pi}$, $\overline{\Theta - \Theta_0}$, $\overline{Z}$, in demselben Verhältnisse zueinander stehen, wie die entsprechenden Hauptachsen des Geschwindigkeitsellipsoids.

Wir wollen, noch im Hinblicke auf spätere Anwendungen, die Grundgleichung (71) der Stellardynamik für stationäre Sternsysteme auf die hier gebrauchten, für ein achsensymmetrisches System, wie es auch unser Galaktisches Sternsystem zweifellos ist, besonders geeigneten Zylinderkoordinaten umrechnen. Zu diesem Zwecke gehen wir von der in (59) gegebenen Form dieser Gleichung aus, die eine Eigenschaft der Verteilungsfunktion f zum Ausdrucke bringt, die natürlich in allen Koordinatensystemen bestehen bleiben muß. Denken wir uns nun die Verteilungsfunktion in Zylinderkoordinaten ausgedrückt

$$f(\varpi, \vartheta, z, \Pi, \Theta, Z)$$

so muß sie augenscheinlich der Bedingung genügen

$$\dot{\varpi}\frac{\partial f}{\partial \varpi} + \dot{\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \dot{z}\frac{\partial f}{\partial z} + \dot{\Pi}\frac{\partial f}{\partial \Pi} + \dot{\Theta}\frac{\partial f}{\partial \Theta} + \dot{Z}\frac{\partial f}{\partial Z} = 0\,. \tag{120}$$

Nun hängen die *linearen* Geschwindigkeitskomponenten Π, Θ, Z mit den zeitlichen Änderungen der Lagekoordinaten $\dot{\varpi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\zeta}$ bekanntlich (und wie auch ein Blick auf Abb. 3 zeigt), durch die Beziehungen

$$\Pi = \dot{\varpi} \qquad \Theta = \varpi\dot{\vartheta} \qquad Z = \dot{z} \tag{121}$$

zusammen, mittelst derer unsere partielle Differentialgleichung (120) in

$$\Pi\frac{\partial f}{\partial \varpi} + \frac{\Theta}{\varpi}\frac{\partial f}{\partial \vartheta} + Z\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \dot{\Pi}\frac{\partial f}{\partial \Pi} + \dot{\Theta}\frac{\partial f}{\partial \Theta} + \dot{Z}\frac{\partial f}{\partial Z} = 0 \tag{122}$$

übergeht. Um die gesuchte Gleichung zu erhalten, haben wir also nur noch $\dot{\Pi}$, $\dot{\Theta}$, $\dot{Z}$ in (122) durch ihre Ausdrücke in ϖ, ϑ, z und den durch das Potential V gegebenen Kraftkomponenten zu ersetzen. Hierzu bedienen wir uns der Bewegungsgleichungen in zylindrischen Koordinaten, die wir unmittelbar aus dem Hamiltonschen Prinzipe erhalten, und zwar in der Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{\partial V}{\partial \lambda}\,, \tag{123}$$

wo λ irgendeine der drei Koordinaten ϖ, ϑ, z bezeichnen soll, $\dot{\lambda}$ deren Derivierte nach der Zeit, und T die kinetische Energie eines Sternes bedeutet. In dem hier betrachteten Falle ist T natürlich gleich

$$T = \tfrac{1}{2}\left[\Pi^2 + \Theta^2 + Z^2\right] = \tfrac{1}{2}\left[\dot{\varpi}^2 + \varpi^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2\right] \quad , \tag{124}$$

und es ist daher

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varpi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varpi} &= \ddot{\varpi} - \varpi \dot{\vartheta}^2 &&= \frac{\partial V}{\partial \varpi} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} &= 2\varpi \dot{\varpi} \dot{\vartheta} + \varpi^2 \ddot{\vartheta} &&= \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial z} &= \ddot{z} &&= \frac{\partial V}{\partial z} \ .
\end{aligned} \tag{124'}$$

Wegen

$$\dot{\Pi} = \ddot{\varpi} \qquad \dot{\Theta} = \dot{\varpi}\dot{\vartheta} + \varpi \ddot{\vartheta} \qquad \dot{Z} = \ddot{z}$$

ist aber

$$2\varpi \dot{\varpi} \dot{\vartheta} + \varpi^2 \ddot{\vartheta} = \dot{\varpi}(\varpi \dot{\vartheta}) + \varpi(\dot{\varpi}\dot{\vartheta} + \varpi \ddot{\vartheta}) = \Pi \cdot \Theta + \varpi \dot{\Theta}$$

und durch Einsetzen in (124') und Auflösung nach $\dot{\Pi}, \dot{\Theta}, \dot{Z}$,

$$\dot{\Pi} = \frac{\partial V}{\partial \varpi} + \frac{\Theta^2}{\varpi} ; \quad \dot{\Theta} = \frac{1}{\varpi} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} - \frac{\Pi \cdot \Theta}{\varpi} ; \quad \dot{Z} = \frac{\partial V}{\partial z} \ . \tag{125}$$

Diese drei Ausdrücke setzen wir nun in (122) ein, worauf unsere Gleichung die Form annimmt

$$\begin{aligned}
\Pi \frac{\partial f}{\partial \varpi} + \frac{\Theta}{\varpi} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial V}{\partial \varpi} + \frac{\Theta^2}{\varpi}\right) \frac{\partial f}{\partial \Pi} + \\
+ \left(\frac{1}{\varpi} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} - \frac{\Pi \Theta}{\varpi}\right) \frac{\partial f}{\partial \Theta} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial Z} = 0 \ .
\end{aligned} \tag{126}$$

Dies ist die Form der Grundgleichung der Stellardynamik in zylindrischen Koordinaten, die ganz allgemein für jedes Sternsystem gilt. Zeichnet sich das betrachtete Sternsystem durch Achsensymmetrie aus, und wählen wir die Symmetrieachse zur Z-Achse unseres Koordinatensystems, dann dürfen die Funktionen f und V natürlich nicht mehr vom azimutalen Winkel ϑ abhängen, so daß ihre Derivierten nach ϑ alle identisch gleich Null zu setzen sind. Gleichung (126) nimmt dann die vereinfachte Form an

$$\Pi \frac{\partial f}{\partial \varpi} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial V}{\partial \varpi} + \frac{\Theta^2}{\varpi}\right) \frac{\partial f}{\partial \Pi} - \frac{\Pi \Theta}{\varpi} \frac{\partial f}{\partial \Theta} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial Z} = 0 \ , \tag{127}$$

aus der sich, durch Anwendung des in Gleichungen (71) und (72) enthaltenen Auflösungsverfahrens (LAGRANGEsche Methode), die beiden Integrale (102) und (103) unmittelbar ergeben.

3. Kugelsymmetrische Systeme

In einem kugelsymmetrischen System kann das Potential nur von der Entfernung r vom Mittelpunkte des Systems abhängen, also nur die Form $V(r)$ haben, wo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist. Wir haben daher in diesem Falle

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{y}{r}; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{z}{r},$$

und das die stationären Zustände definierende Gleichungssystem (72) wird nun

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{du}{\frac{x}{r}\frac{\partial V}{\partial r}} = \frac{dv}{\frac{y}{r}\frac{\partial V}{\partial r}} = \frac{dw}{\frac{z}{r}\frac{\partial V}{\partial r}}. \tag{128}$$

Aus den drei letzten dieser Gleichungen erhalten wir sofort

$$y\,dw = z\,dv; \quad z\,du = x\,dw; \quad x\,dv = y\,du,$$

und wenn wir diese Ausdrücke jeweils mit den aus den drei ersten Gleichungen folgenden Beziehungen

$$w\,dy = v\,dz; \quad u\,dz = w\,dx; \quad v\,dx = u\,dy$$

durch Addition kombinieren und die Integration ausführen, ergeben sich die drei Integrale

$$\begin{aligned} I_2 &= yw - zv = \text{const.} \\ I_3 &= zu - xw = \text{const.} \\ I_4 &= xv - yu = \text{const.} \end{aligned} \tag{129}$$

die in diesem Falle neben das natürlich auch bestehende Energieintegral I_1

$$I_1 = u^2 + v^2 + w^2 - 2V = \text{const.} \tag{130}$$

treten. Nach dem Jeans-Charlierschen Theorem hat daher die Verteilungsfunktion eines kugelsymmetrischen Sternsystems in einem stationären Zustande die allgemeine Form

$$f = F(I_1, I_2, I_3, I_4).$$

Nun muß aber diese Funktion auch noch die Poissonsche Gleichung (64) erfüllen, und da V voraussetzungsgemäß nur von r abhängt, wird auch die räumliche Sterndichte ν und die Verteilungsfunktion f die Lagekoordinaten x, y, z nur in der Kombination $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ enthalten können. Die drei *Rotationsmomente* I_2, I_3, I_4 um die drei Koordinatenachsen x, y, z können daher nur in einer gegenüber Drehungen des Koordinatensystems invarianten Verbindung auftreten, und eine solche ist natürlich das *gesamte Drehmoment* I, das durch die Verbindung

$$I^2 = I_2^2 + I_3^2 + I_4^2$$

gegeben wird, oder, durch Einsetzen der Ausdrücke (129), nach einem bekannten Satze:

$$I^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(u^2 + v^2 + w^2) - (xu + yv + zw)^2 = c^2 r^2 - \dot{r}^2 r^2 \quad ,$$

wo

$$c^2 = u^2 + v^2 + w^2 \tag{131}$$

die Totalgeschwindigkeit und $\dot{r}$ die totale Derivierte von r nach der Zeit bezeichnet. Die Verteilungsfunktion wird also durch einen Ausdruck der Form

$$f = F(c^2 - 2V, c^2 r^2 - r^2 \dot{r}^2) \tag{132}$$

gegeben, oder wenn wir im zweiten Argumente

$$r^2 \dot{r}^2 = (ux + vy + wz)^2 = r^2 c^2 \cos^2\alpha$$

schreiben, wo α den Winkel bedeutet, den die Geschwindigkeit c mit dem Radiusvektor r des Sternes bildet, auch durch

$$f = F(c^2 - 2V, r^2 c^2 \sin^2\alpha) . \tag{133}$$

Da für irgend einen fest gewählten Raumpunkt im System V und r konstant sind, hängt der Geschwindigkeitskörper in ihm nur von c und α ab. Die Häufigkeiten der Geschwindigkeiten sind also in verschiedenen Richtungen

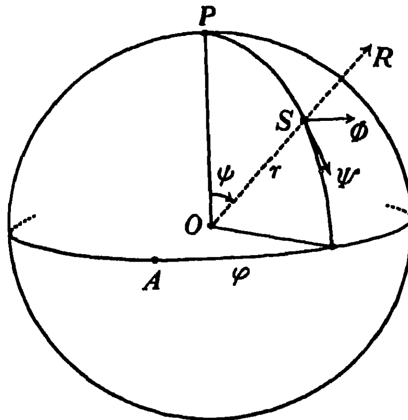


Abb. 4
Die Geschwindigkeitskomponenten in einem sphärischen Koordinatensystem.

verschieden, und es kann daher in diesem Falle auch eine Sternströmung auftreten. Der Ausdruck (133) zeigt, daß die radiale Richtung die ausgezeichnete Symmetrieachse der Geschwindigkeitsverteilung bei einem kugelsymmetrischen Sternsystem ist, da der Winkel zwischen Geschwindigkeit und Radiusvektor nur in der Form $\sin^2\alpha$ in die Verteilungsfunktion ein-

geht. Der Geschwindigkeitskörper hat also hier die Gestalt einer Rotationsfigur um den Radiusvektor. Wenn dieser Geschwindigkeitskörper eine in Richtung von r langgestreckte Form hat, sind die radial gerichteten Geschwindigkeiten am allerhäufigsten; wir haben den Fall einer *radialen Strömung*, und es kann in einem kugelsymmetrischen Sternsystem in keiner anderen Richtung als der radialen eine Sternströmung auftreten — allerdings unter der Voraussetzung, daß sich dieses System in einem stationären Zustande befindet.

Um auch diesen sphärisch-symmetrischen Fall, der uns bei der Betrachtung der in unserem und anderen Sternsystemen enthaltenen, unter dem Namen «Kugelhaufen» bekannten Untersysteme begegnet, etwas weiter ins einzelne zu verfolgen, nehmen wir, wie bereits für den achsen-symmetrischen Fall geschehen, an, daß die Verteilungsfunktion dem verallgemeinerten Schwarzschildschen Typus angehört, also durch eine willkürlich zu wählende Funktion eines Argumentes vom Typus (111) in den Geschwindigkeitskomponenten dargestellt werden kann. Die beiden Integrale I_1 und $I = I_2^2 + I_3^2 + I_4^2$, von denen allein sie abhängen darf, schreiben wir in einem sphärischen Koordinatensystem r, ψ, φ um, wobei wir die in Abb. 4 mit R, Ψ, Φ bezeichneten, zueinander rechtwinkligen Geschwindigkeitskomponenten benutzen. Diese hängen mit den zeitlichen Derivierten der Koordinaten augenscheinlich durch die Beziehungen

$$R = \dot{r}\,; \quad \Psi = r\dot{\psi}\,; \quad \Phi = r\sin\psi \cdot \dot{\varphi} \tag{134}$$

zusammen, und wir haben

$$I_1 = R^2 + \Psi^2 + \Phi^2 - 2V = R^2 + T^2 - 2V = \text{const.} \tag{135}$$

$$I = r\sqrt{\Psi^2 + \Phi^2} = rT = \text{const.}\,, \tag{136}$$

wo

$$T^2 = \Psi^2 + \Phi^2 \tag{137}$$

die lineare *transversale*, d. h. auf dem Radiusvektor senkrecht stehende Geschwindigkeit bedeutet. Die allgemeinste Kombination dieser beiden Integrale, die einer quadratischen Form in den Geschwindigkeitskomponenten entspricht, ist augenscheinlich

$$I_1 + kI^2$$

wo k eine von R, Ψ, Φ, unabhängige Größe bedeutet, die noch eine Funktion der Lagekoordinaten r, ψ, φ, sein kann. Unsere Verteilungsfunktion nimmt in diesem Falle die Form

$$f = F[R^2 + \Psi^2 + \Phi^2 - 2V + kr^2(\Psi^2 + \Phi^2)] \tag{138}$$

an, aus der wir ersehen, daß sich die längs den Richtungen von R, Ψ und Φ liegenden Achsen des Geschwindigkeitsellipsoids wie

$$\sqrt{1+kr^2} : 1 : 1 \tag{139}$$

zueinander verhalten.

Um die räumliche Sterndichte ν in unserem sphärisch-symmetrischen System mit Hilfe der Verteilungsfunktion (138) nach Formel (50) zu berechnen, führen wir statt R, Ψ und Φ neue Variablen durch die Beziehungen

$$\Psi_1 = \sqrt{1+kr^2} \cdot \Psi\,; \quad \Phi_1 = \sqrt{1+kr^2} \cdot \Phi\,; \quad R^2 + \Psi_1^2 + \Phi_1^2 = c_1^2 \tag{140}$$

ein, und erhalten in genau derselben Weise, wie beim achsen-symmetrischen System (s. Formeln (116) – (119)),

$$\nu = \frac{4\pi}{1+kr^2} \int_0^\infty F(c_1^2 - 2V)\, c_1^2\, dc_1\,. \tag{141}$$

Die Mittelwerte der längs den drei Hauptachsen des Geschwindigkeitsellipsoids gerichteten Geschwindigkeitskomponenten, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, sind nun

$$\overline{R} = \sqrt{1+kr^2} \cdot \overline{\Psi} = \sqrt{1+kr^2} \cdot \overline{\Phi} = \frac{\int_0^\infty F(c_1^2 - 2V)\, c_1^3\, dc_1}{\int_0^\infty F(c_1^2 - 2V)\, c_1^2\, dc_1}\,, \tag{142}$$

und ihr Verhältnis ist wieder dasselbe, wie das Verhältnis der Achsen der Ellipsoidenflächen gleicher Häufigkeit, also

$$\overline{R} : \overline{\Psi} : \overline{\Phi} = \sqrt{1+kr^2} : 1 : 1\,. \tag{143}$$

Wenn $k > 0$ ist, liegt die längste Achse in der Richtung des Radiusvektors und wir haben an jeder Stelle des Sternsystems eine *radiale Sternströmung.* Bei $k < 0$ wird die erhaltene Lösung nur innerhalb einer Kugel vom Radius $r_0 = \sqrt{\frac{-1}{k}}$ Gültigkeit behalten, und es wird dann eine *Ebene größter Beweglichkeit* für die Sterne geben, nämlich die auf dem Radiusvektor senkrecht stehende Ebene. Im Falle $k = 0$ schließlich ist auch die Geschwindigkeitsverteilung überall eine kugelsymmetrische, die im Falle, daß die Verteilungsfunktion F eine Exponentialfunktion wird (thermodynamisches Gleichgewicht), in eine MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung übergeht.

Es ist klar, daß das gesamte Drehmoment eines sphärisch-symmetrischen Systems gleich Null sein muß, auch im Falle einer radialen Sternströmung, und das von ihm angestrebte, jedoch bei endlicher Masse niemals zu erreichende Endstadium ist daher das einer nicht-rotierenden isothermen Gaskugel.

Da das zur Beschreibung eines kugelsymmetrischen Sternsystems zweckmäßigste Koordinatensystem natürlich das sphärische ist, wollen wir hier, wie wir es auch beim achsen-symmetrischen System getan haben, die Grundgleichung der Stellardynamik auf das bei der Behandlung konkreter Systeme dieser Art geeignetste Koordinatensystem umrechnen. Natürlich muß wieder von dem Ausdrucke der kinetischen Energie ausgegangen werden, der aber hier in sphärischen Koordinaten, unter Benutzung der Geschwindigkeitskomponenten (134) lautet

$$T = \tfrac{1}{2}[R^2 + \Psi^2 + \Phi^2] = \tfrac{1}{2}[\dot r^2 + r^2 \cdot \dot\psi^2 + r^2 \sin^2\psi \cdot \dot\varphi^2] \,. \qquad (144)$$

Wir erhalten in analoger Weise wie im achsen-symmetrischen Falle

$$\dot R - \frac{1}{r}(\Psi^2 + \Phi^2) = \frac{\partial V}{\partial r}\,; \quad \dot\Psi + \frac{R\Psi}{r} - \frac{\operatorname{cotg}\psi}{r}\,\Phi^2 = \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \psi}\,;$$
$$\dot\Phi + \frac{R\Phi}{r} + \frac{\operatorname{cotg}\psi}{r}\,\Psi\Phi = \frac{1}{r\sin\psi}\,\frac{\partial V}{\partial\varphi}\,, \qquad (145)$$

und da unsere zu transformierende Differentialgleichung in sphärischen Koordinaten, analog zu (120), die Form hat

$$R\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\Psi}{r}\frac{\partial f}{\partial\psi} + \frac{\Phi}{r\sin\psi}\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \dot R\frac{\partial f}{\partial R} + \dot\Psi\frac{\partial f}{\partial\Psi} + \dot\Phi\frac{\partial f}{\partial\Phi} = 0\,, \qquad (146)$$

ergibt sich durch Einsetzen der Ausdrücke für $\dot R, \dot\Psi, \dot\Phi$ aus (145) in (146)

$$R\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\Psi}{r}\frac{\partial f}{\partial\psi} + \frac{\Phi}{r\sin\psi}\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \left\{\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r}(\Psi^2 + \Phi^2)\right\}\frac{\partial f}{\partial \dot R} + \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\psi} -\right.$$
$$\left. - \frac{R\Psi}{r} + \frac{\operatorname{cotg}\psi}{r}\Phi^2\right\}\frac{\partial f}{\partial\Psi} + \left\{\frac{1}{r\sin\psi}\frac{\partial V}{\partial\varphi} - \frac{R\Phi}{r} - \frac{\operatorname{cotg}\psi}{r}\Psi\Phi\right\}\frac{\partial f}{\partial\Phi} = 0\,. \qquad (147)$$

Dieser Ausdruck der Grundgleichung der Stellardynamik in sphärischen Koordinaten, der für jedes in einem stationären Zustande befindliche Sternsystem gilt, vereinfacht sich beträchtlich, wenn wir es mit einem Sternsystem zu tun haben, das seiner Natur nach kugelsymmetrisch ist. In diesem Falle hängt nämlich weder das Potential V, noch die Verteilungsfunktion f von den Winkelkoordinaten ψ, φ ab; wir haben also

$$\frac{\partial V}{\partial\psi} = \frac{\partial V}{\partial\varphi} = \frac{\partial f}{\partial\psi} = \frac{\partial f}{\partial\varphi} = 0\,,$$

und Gleichung (147) vereinfacht sich zu

$$R\frac{\partial f}{\partial r} + \left\{\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r}(\Psi^2 + \Phi^2)\right\}\frac{\partial f}{\partial \dot R} - \frac{R\Psi}{r}\frac{\partial f}{\partial\Psi} - \frac{R\Phi}{r}\frac{\partial f}{\partial\Phi} +$$
$$+ \frac{\Phi}{r}\operatorname{cotg}\psi\left(\Phi\frac{\partial f}{\partial\Psi} - \Psi\frac{\partial f}{\partial\Phi}\right) = 0\,.$$

Nun muß diese Gleichung bei jeder beliebigen Wahl der Richtung der OP-Achse ihre Gültigkeit behalten, und dies ist nur dann möglich, wenn

$$R\frac{\partial f}{\partial r}+\left\{\frac{\partial V}{r}+\frac{1}{r}(\Psi^2+\Phi^2)\right\}\frac{\partial f}{\partial R}-\frac{R}{r}\left\{\Psi\frac{\partial f}{\partial \Psi}+\Phi\frac{\partial f}{\partial \Phi}\right\}=0 \qquad (148)$$

und

$$\Phi\frac{\partial f}{\partial \Psi}-\Psi\frac{\partial f}{\partial \Phi}=0 \qquad (149)$$

für sich verschwinden. Eine weitere Vereinfachung kann noch dadurch erzielt werden, daß wir mittelst der Relation (137) die Transversalgeschwindigkeit T an Stelle der Geschwindigkeitskomponenten Ψ, Φ einführen. Wir haben augenscheinlich aus (149)

$$\frac{\partial f}{\partial(\Psi^2)}=\frac{\partial f}{\partial(\Phi^2)}\ , \qquad (150)$$

woraus unmittelbar zu ersehen ist, daß die beiden Komponenten in der Verteilungsfunktion f nur in der durch (137) gegebenen Verbindung auftreten. Aus (150) und (137) ergibt sich aber leicht

$$\Psi\frac{\partial f}{\partial \Psi}+\Phi\frac{\partial f}{\partial \Phi}=T\frac{\partial f}{\partial T}\ ,$$

worauf unsere Grundgleichung für das kugelsymmetrische System die endgültige Form

$$R\frac{\partial f}{\partial r}+\left\{\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{T^2}{r}\right\}\frac{\partial f}{\partial R}-\frac{RT}{r}\frac{\partial f}{\partial T}=0 \qquad (151)$$

annimmt. Durch Anwendung des LAGRANGEschen Auflösungsverfahrens auf diese Gleichung kann leicht das zugeordnete System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen abgeleitet werden, als dessen Integrale dann die Ausdrücke (135) und (136) unmittelbar folgen.

Transformation der Grundgleichung der Stellardynamik auf allgemeine orthogonale Koordinaten

Da wir bei der Betrachtung der in der Welt vorkommenden Sternsysteme, und namentlich der Gestalten der sog. «Außergalaktischen Nebel»-Systeme sehr verschiedener Formen zu untersuchen haben werden, wollen wir hier zur Vervollständigung unseres theoretischen Rüstzeuges, mit dem wir an das Studium der konkreten Sternsysteme heranzugehen beabsichtigen, noch die allgemeine Form der Grundgleichung der Stellardynamik in irgendeinem orthogonalen System von Krummlinigen Koordinaten angeben, von der die Ausdrücke (71), (126) und (147) nur spezielle Fälle darstellen.

Ein durch die Beziehungen

$$x = x(\lambda, \mu, \nu)\,; \quad y = y(\lambda, \mu, \nu)\,; \quad z = z(\lambda, \mu, \nu)\,, \tag{152}$$

in denen x, y, z die cartesischen Koordinaten eines Punktes bedeuten, definiertes krummliniges Koordinatensystem λ, μ, ν bestimmt die Lage eines Punktes als Schnittpunkt von drei Flächen der durch die Gleichungen (152) gegebenen drei unendlichen Flächenscharen, die durch die Angabe dreier bestimmter Werte der Koordinaten x, y, z herausgegriffen werden, oder auch als Schnittpunkt dreier Kurven, die aus denselben Gleichungen durch Festhalten von zwei Variablen, also z. B. μ, ν und ausschließliche Variation der dritten Variablen, also z. B. λ, erhalten werden. Das Koordinatensystem λ, μ, ν heißt *orthogonal,* wenn die Normalen der drei durch den betrachteten Punkt gehenden Flächen überall ein rechtwinkeliges Achsensystem bilden, oder auch wenn die drei sich im Punkte schneidenden Kurven drei aufeinander senkrecht stehende Fortschreitungsrichtungen definieren. Da aus (152) durch Differentiation unmittelbar

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\,d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu}\,d\mu + \frac{\partial x}{\partial \nu}\,d\nu\,; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \lambda}\,d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \mu}\,d\mu + \frac{\partial y}{\partial \nu}\,d\nu\,;$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial \lambda}\,d\lambda + \frac{\partial z}{\partial \mu}\,d\mu + \frac{\partial z}{\partial \nu}\,d\nu$$

folgt, wird die Orthogonalitätsbedingung durch die Beziehung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = P^2 d\lambda^2 + Q^2 d\mu^2 + R^2 d\nu^2$$

gegeben, in der ds die den Inkrementen dx, dy, dz, und auch $d\lambda, d\mu, d\nu$, entsprechende infinitesimale räumliche Verschiebung bedeutet. Die Faktoren P, Q, R, mit denen letztere multipliziert werden müssen, um die *linearen* Verschiebungen in den drei an jeder Stelle zueinander orthogonalen *Hauptrichtungen* zu erhalten, sind im allgemeinen Funktionen der Variablen λ, μ, ν, und werden augenscheinlich durch die Ausdrücke

$$P^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2; \quad Q^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2;$$
$$R^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2 \tag{153}$$

gegeben. Wenn nun $\dot\lambda, \dot\mu, \dot\nu$, die *zeitlichen Änderungen* von λ, μ, ν, bezeichnen, werden die *linearen Geschwindigkeitskomponenten* des Punktes in den durch die Transformation (152) definierten drei Hauptrichtungen natürlich durch

$$\Lambda = P\dot\lambda\,; \quad M = Q\dot\mu\,; \quad N = R\dot\nu \tag{154}$$

ausgedrückt werden. Für ein orthogonales *Cartesisches* Koordinatensystem sind die Werte dieser Faktoren alle gleich 1:

$$P = Q = R = 1 \tag{153'}$$

da ja hier die Geschwindigkeiten einfach gleich $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ sind, und $\lambda = x, \mu = y, \nu = z$ zu setzen ist. Bei einem *zylindrischen* Koordinatensystem können λ, μ, ν, bzw. mit ϖ, ϑ, z, in den Transformationsformeln

$$x = \varpi \cos\vartheta\,; \quad y = \varpi \sin\vartheta\,; \quad z = z \tag{155}$$

identifiziert werden, aus denen wir mit Hilfe der Formeln (153) leicht

$$P = 1 \qquad Q = \varpi \qquad R = 1 \tag{156}$$

ableiten, ein Ergebnis, das auch aus (121) unmittelbar abgelesen werden kann. In ähnlicher Weise ergibt sich für ein *sphärisches* Koordinatensystem entweder durch Ausrechnung der Ausdrücke (153) aus den Transformationsformeln

$$x = r \sin\psi \cos\varphi\,; \quad y = r \sin\psi \sin\varphi\,; \quad z = r \cos\psi\,, \tag{157}$$

in denen r, ψ, φ, bzw. mit λ, μ, ν, identifiziert werden können, oder unmittelbar aus den aus Abb. 4 abgeleiteten Formeln (134)

$$P = 1\,; \quad Q = r\,; \quad R = r \sin\psi\,. \tag{158}$$

(Hier darf der Faktor R, mit dem die zeitliche Derivierte der Koordinate ν multipliziert werden muß, um die lineare Geschwindigkeitskomponente N zu ergeben, natürlich nicht mit dem in (134) vorkommenden R verwechselt werden, das dort die Radialgeschwindigkeit $\dot{r}$ bezeichnet).

Um nun die Transformation der Grundgleichung der Stellardynamik auf das allgemeine orthogonale Koordinatensystem λ, μ, ν auszuführen, gehen wir, wie bereits in früheren Fällen, von den LAGRANGEschen dynamischen Gleichungen (123) aus und dem Ausdrucke für die kinetische Energie, den wir hier natürlich in den Koordinaten λ, μ, ν schreiben müssen. Mit den Ausdrücken (154) für die Geschwindigkeitskomponenten lautet letzterer

$$T = \tfrac{1}{2}(\Lambda^2 + M^2 + N^2) = \tfrac{1}{2}[P^2\dot{\lambda}^2 + Q^2\dot{\mu}^2 + R^2\dot{\nu}^2]\,. \tag{159}$$

Es gilt daher für die λ-Koordinate (da ja P, Q, R Funktionen von λ, μ, ν sind)

$$\frac{d}{dt}(P^2\dot{\lambda}) - \tfrac{1}{2}\left(\dot{\lambda}^2 \frac{\partial P^2}{\partial \lambda} + \dot{\mu}^2 \frac{\partial Q^2}{\partial \lambda} + \dot{\nu}^2 \frac{\partial R^2}{\partial \lambda}\right) = \frac{\partial V}{\partial \lambda}\,. \tag{160}$$

Die Ausführung der Differentiation nach t im ersten Gliede ergibt

$$\frac{d}{dt}(P^2\dot{\lambda}) = P^2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}\left(\dot{\lambda}\frac{\partial P^2}{\partial \lambda} + \dot{\mu}\frac{\partial P^2}{\partial \mu} + \dot{\nu}\frac{\partial P^2}{\partial \nu}\right) \tag{161}$$

und dies in (160) eingesetzt

$$P^2\ddot{\lambda} = -\tfrac{1}{2}\dot{\lambda}^2\frac{\partial P^2}{\partial\lambda} + \tfrac{1}{2}\dot{\mu}^2\frac{\partial Q^2}{\partial\lambda} + \tfrac{1}{2}\dot{\nu}^2\frac{\partial R^2}{\partial\lambda} - \dot{\lambda}\dot{\mu}\frac{\partial P^2}{\partial\mu} - \dot{\lambda}\dot{\nu}\frac{\partial P^2}{\partial\nu} + \frac{\partial V}{\partial\lambda}\,. \tag{162}$$

In ganz analoger Weise ergibt sich für die beiden anderen Koordinaten

$$Q^2\ddot{\mu} = +\tfrac{1}{2}\dot{\lambda}^2\frac{\partial P^2}{\partial\mu} - \tfrac{1}{2}\dot{\mu}^2\frac{\partial Q^2}{\partial\mu} + \tfrac{1}{2}\dot{\nu}^2\frac{\partial R^2}{\partial\mu} - \dot{\mu}\dot{\nu}\frac{\partial Q^2}{\partial\nu} - \dot{\mu}\dot{\lambda}\frac{\partial Q^2}{\partial\lambda} + \frac{\partial V}{\partial\mu} \tag{163}$$

$$R^2\ddot{\nu} = +\tfrac{1}{2}\dot{\lambda}^2\frac{\partial P^2}{\partial\nu} + \tfrac{1}{2}\dot{\mu}^2\frac{\partial Q^2}{\partial\nu} - \tfrac{1}{2}\dot{\nu}^2\frac{\partial R^2}{\partial\nu} - \dot{\nu}\dot{\lambda}\frac{\partial R^2}{\partial\lambda} - \dot{\nu}\dot{\mu}\frac{\partial R^2}{\partial\mu} + \frac{\partial V}{\partial\nu} \tag{164}$$

Gleichungen (162) — (164) stellen die *Bewegungsgleichungen* eines Sternes unter dem Einflusse eines Potentials $V(\lambda, \mu, \nu)$ in krummlinigen orthogonalen Koordinaten dar. Aus ihnen lassen sich z. B. durch die Spezialisierung (156) die aus dem Ausdrucke für die kinetische Energie in Zylinderkoordinaten (124) abgeleiteten Bewegungsgleichungen sofort erhalten.

Die Ausdrücke für die *linearen Beschleunigungen* $\dot{\Lambda}, \dot{M}, \dot{N}$, erhalten wir nun, nach dem Vorbilde von S. CHANDRASEKHAR[11]), am einfachsten in folgender Weise: es ist, nach (154)

$$P\dot{\Lambda} = P\frac{d}{dt}(P\dot{\lambda}) = P^2\ddot{\lambda} + \tfrac{1}{2}\dot{\lambda}\frac{dP^2}{dt} = P^2\ddot{\lambda} + \tfrac{1}{2}\dot{\lambda}\left(\dot{\lambda}\frac{\partial P^2}{\partial\lambda} + \dot{\mu}\frac{\partial P^2}{\partial\mu} + \dot{\nu}\frac{\partial P^2}{\partial\nu}\right) \tag{165}$$

und durch Einsetzen von $P^2\ddot{\lambda}$ aus (162)

$$P\dot{\Lambda} = \tfrac{1}{2}\dot{\mu}^2\frac{\partial Q^2}{\partial\lambda} + \tfrac{1}{2}\dot{\nu}^2\frac{\partial R^2}{\partial\lambda} - \tfrac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\mu}\frac{\partial P^2}{\partial\mu} - \tfrac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\nu}\frac{\partial P^2}{\partial\nu} + \frac{\partial V}{\partial\lambda} \tag{166}$$

oder wegen (154)

$$P\dot{\Lambda} = \tfrac{1}{2}\frac{M^2}{Q^2}\frac{\partial Q^2}{\partial\lambda} + \tfrac{1}{2}\frac{N^2}{R^2}\frac{\partial R^2}{\partial\lambda} - \tfrac{1}{2}\frac{\Lambda M}{PQ}\frac{\partial P^2}{\partial\mu} - \tfrac{1}{2}\frac{\Lambda N}{PR}\frac{\partial P^2}{\partial\nu} + \frac{\partial V}{\partial\lambda}\,. \tag{167}$$

Für $\dot{M}$ und $\dot{N}$ gelten natürlich die entsprechenden, in analoger Weise abzuleitenden Ausdrücke

$$Q\dot{M} = \tfrac{1}{2}\frac{N^2}{R^2}\frac{\partial R^2}{\partial\mu} + \tfrac{1}{2}\frac{\Lambda^2}{P^2}\frac{\partial P^2}{\partial\mu} - \tfrac{1}{2}\frac{MN}{QR}\frac{\partial Q^2}{\partial\nu} - \tfrac{1}{2}\frac{M\Lambda}{QP}\frac{\partial Q^2}{\partial\lambda} + \frac{\partial V}{\partial\mu} \tag{168}$$

$$R\dot{N} = \tfrac{1}{2}\frac{\Lambda^2}{P^2}\frac{\partial P^2}{\partial\nu} + \tfrac{1}{2}\frac{M^2}{Q^2}\frac{\partial Q^2}{\partial\nu} - \tfrac{1}{2}\frac{N\Lambda}{RP}\frac{\partial R^2}{\partial\lambda} - \tfrac{1}{2}\frac{NM}{RQ}\frac{\partial R^2}{\partial\mu} + \frac{\partial V}{\partial\nu}\,. \tag{169}$$

Die Ausdrücke (167) — (169) geben uns nun die Möglichkeit, die Grundglei-

---

[11]) S. CHANDRASEKHAR, The Dynamics of Stellar Systems, Ap. J. *90*, 154 (1939).

chung der Stellardynamik in beliebigen orthogonalen krummlinigen Koordinaten auszudrücken. Gehen wir wieder von der Form (59) dieser Gleichung aus, und denken wir uns die Verteilungsfunktion f als Funktion dieser Koordinaten λ, μ, ν ausgedrückt (zunächst für den stationären Fall, bei dem die Zeit t in f nicht explicite vorkommt) dann hat unsere Grundgleichung die Form

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}\dot{\lambda} + \frac{\partial f}{\partial \mu}\dot{\mu} + \frac{\partial f}{\partial \nu}\dot{\nu} + \frac{\partial f}{\partial \Lambda}\dot{\Lambda} + \frac{\partial f}{\partial M}\dot{M} + \frac{\partial f}{\partial N}\dot{N} = 0 \qquad (170)$$

oder wegen (154)

$$\frac{\Lambda}{P}\frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{M}{Q}\frac{\partial f}{\partial \mu} + \frac{N}{R}\frac{\partial f}{\partial \nu} + \dot{\Lambda}\frac{\partial f}{\partial \Lambda} + \dot{M}\frac{\partial f}{\partial M} + \dot{N}\frac{\partial f}{\partial N} = 0\,. \qquad (171)$$

Indem wir nun hierin die Ausdrücke (167) — (169) für $\dot{\Lambda}, \dot{M}, \dot{N}$ einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{P}\left\{\Lambda\frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{1}{2}\left[\frac{M^2}{Q^2}\frac{\partial Q^2}{\partial \lambda} + \frac{N^2}{R^2}\frac{\partial R^2}{\partial \lambda} - \frac{\Lambda M}{PQ}\frac{\partial P^2}{\partial \mu} - \frac{\Lambda N}{PR}\frac{\partial P^2}{\partial \nu} + \right.\right. && (172)\\
&\qquad\qquad\left.\left. + 2\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right]\frac{\partial f}{\partial \Lambda}\right\} + \\
&+\frac{1}{Q}\left\{M\frac{\partial f}{\partial \mu} + \frac{1}{2}\left[\frac{N^2}{R^2}\frac{\partial R^2}{\partial \mu} + \frac{\Lambda^2}{P^2}\frac{\partial P^2}{\partial \mu} - \frac{MN}{QR}\frac{\partial Q^2}{\partial \nu} - \frac{M\Lambda}{QP}\frac{\partial Q^2}{\partial \lambda} + \right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left. + 2\frac{\partial V}{\partial \mu}\right]\frac{\partial f}{\partial M}\right\} + \\
&+\frac{1}{R}\left\{N\frac{\partial f}{\partial \nu} + \frac{1}{2}\left[\frac{\Lambda^2}{P^2}\frac{\partial P^2}{\partial \nu} + \frac{M^2}{Q^2}\frac{\partial Q^2}{\partial \nu} - \frac{N\Lambda}{RP}\frac{\partial R^2}{\partial \lambda} - \frac{NM}{RQ}\frac{\partial R^2}{\partial \mu} + \right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left. + 2\frac{\partial V}{\partial \nu}\right]\frac{\partial f}{\partial N}\right\} = 0
\end{aligned}$$

und das ist die grundlegende partielle Differentialgleichung, der die in beliebigen orthogonalen krummlinigen Koordinaten ausgedrückte Verteilungsfunktion

$$f(\lambda, \mu, \nu, \Lambda, M, N)$$

zu genügen hat. Durch Spezialisierung der in Gleichung (172) eingehenden Werte von P, Q, R gemäß (156) für ein zylindrisches Koordinatensystem, und gemäß (158) für ein sphärisches Koordinatensystem, erhält man leicht aus (172) die für diese beiden Spezialfälle bereits oben abgeleiteten Formen (126) und (147) der Grundgleichung. Für $P = Q = R = 1$ geht (172) natürlich in (71) über, da das Koordinatensystem in diesem Falle ein Cartesisches wird.

Es ist klar, daß die für den stationären Fall geltenden Formen (126), (147) und (172) der Grundgleichung durch Hinzufügung des Gliedes $\frac{\partial f}{\partial t}$ in die für *nicht-stationäre* Fälle geltenden Formen dieser Gleichung übergehen, wie das

auch für das Cartesische Koordinatensystem — Gleichungen (67) und (71) — der Fall ist, da die zeitliche Abhängigkeit der Verteilungsfunktion durch eine Transformation auf ein im Raume festes (zeitlich unveränderliches) krummliniges Koordinatensystem natürlich nicht verändert wird. Wir werden im 4. Kapitel gelegentlich der Betrachtung gewisser Außergalaktischer Nebel auch zeitlich veränderliche, also nicht-stationäre Sternsysteme studieren müssen, wobei wir von der durch das Glied $\frac{\partial f}{\partial t}$ erweiterten Gleichung (172) Gebrauch machen werden. Hier wollen wir uns nur auf die Bemerkung beschränken, daß auch die dort zu schildernden Untersuchungen, die hauptsächlich S. Chandrasekhar zu verdanken sind, von der vereinfachenden Annahme ausgehen, daß der Geschwindigkeitskörper zu jeder Zeit und an jeder Stelle dem «erweiterten Schwarzschildschen Typus» angehört, f also durch eine Funktion

$$f(\lambda, \mu, \nu, \Lambda, M, N, t) = f(Q + \sigma) \tag{173}$$

eines einzigen Argumentes $(Q + \sigma)$ darstellbar ist, wo

$$\begin{aligned} Q = {} & a(\Lambda - \Lambda_0)^2 + b(M - M_0)^2 + c(N - N_0)^2 + 2f(M - M_0)(N - N_0) + \\ & + 2g(N - N_0)(\Lambda - \Lambda_0) + 2h(\Lambda - \Lambda_0)(M - M_0) \end{aligned} \tag{174}$$

und a, b, c, f, g, h, σ, Funktionen von λ, μ, ν, und evtl. t sind, von den Geschwindigkeitskomponenten Λ, M, N, aber nicht mehr abhängen.

II. Teil

KONKRETE STERNSYSTEME

III. KAPITEL

DAS GALAKTISCHE SYSTEM

Als erstes Objekt für die praktische Anwendung der im I. Teil gegebenen allgemeinen Grundlagen, wollen wir dasjenige Sternsystem wählen, dem unsere Sonne als einzelnes «Sterngasmolekül» angehört, und das, weil die allermeisten seiner Sterne in der Nähe der auf dem Himmel durch das helle Band der Milchstraße gekennzeichneten Ebene liegen, das «Galaktische Sternsystem» genannt wird. In bezug auf dieses System befinden wir uns in mancher Hinsicht in einer eigentümlichen Lage. Da der Standpunkt, von dem aus wir es betrachten und auf den sich alle unsere Beobachtungen der in ihm stattfindenden Erscheinungen notwendig beziehen müssen, mitten drin in diesem System liegt, läßt sich letzteres in seiner Gesamtheit von uns nicht ohne weiteres überschauen, und wir sind daher gezwungen, die zur Anwendung unserer allgemeinen statistisch-dynamischen Ergebnisse notwendigen Erfahrungstatsachen durch eine mühsame und langwierige vorbereitende Arbeit zusammenzutragen. Diese Untersuchungen bestehen: 1. in der möglichst genauen Feststellung der *scheinbaren* Örter der einzelnen Sterne an der Himmelssphäre sowie verschiedener charakteristischer Merkmale dieser Sterne, wie ihre scheinbaren Helligkeiten, spektralen Eigentümlichkeiten usw. die uns Anhaltspunkte zur Ermittlung der statistischen Funktionen der räumlichen Verteilungen der Sterne verschiedener Sterntypen verschaffen, und 2. in der Feststellung ihrer «Eigenbewegungen» oder zeitlichen Verschiebungen auf der Himmelssphäre, die uns, in Verbindung mit ihren Entfernungen und spektroskopisch bestimmbaren «Radialgeschwindigkeiten», die für ihre *räumlichen* Geschwindigkeiten geltenden Verteilungsgesetze abzuleiten gestatten. Die im Vergleiche zu den Entfernungen anderer Sternsysteme viel kleineren Entfernungen von uns der zu untersuchenden «galaktischen» Sterne, durch die uns namentlich die Bestimmung ihrer Bewegungen erleichtert wird, stellt selbstverständlich einen großen Vorteil dar, jedoch wird dieser Vorteil weitgehend durch die Inhomogenität des sich aus den direkten Beobachtungen ergebenden Materials aufgewogen, welche durch den Umstand bedingt wird, daß die allermeisten «scheinbaren» Merkmale von den Entfernungen der Objekte abhängen, und diese für einen mitten unter

ihnen befindlichen Beobachter innerhalb sehr weiter relativer Grenzen schwanken; dazu kommt, daß uns diese Entfernungen in den allermeisten Fällen nur sehr ungenau bekannt oder sogar ganz unbekannt sind. Das Ziel der statistischenVorbereitung, die, wie erwähnt, in der empirischen Ermittelung der räumlichen Verteilungsfunktionen der Sterne verschiedener physikalischer Typen, aus denen sich das Galaktische System zusammensetzt, sowie der an jeder Stelle dieses Systems für jeden Typus geltenden Geschwindigkeitsverteilung bestehen müßte, ist daher heute erst in äußerst unvollkommenerWeise erreicht. Zwar dachten am Ende des XIX. und am Anfange unseres Jahrhunderts die auf diesem Gebiete führenden Forscher SEELIGER und KAPTEYN dieses praktische Problem weitgehend gelöst zu haben, indem sie, unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen, für die räumliche Sternverteilung ein stark abgeplattetes ellipsoidisches Gebilde mit rasch nach außen abfallender Sterndichte von etwa 18000 Parsec Ausdehnung in der galaktischen Symmetriebene erhielten, dessen Bewegungszustand, der im wesentlichen in Rotationen in beiden Richtungen um die Symmetrieachse bestehen sollte, sie gleichfalls gefunden zu haben glaubten; jedoch hat die neuere Forschung mit Sicherheit zu der Erkenntnis geführt, daß dieses Bild von derWirklichkeit noch sehr weit entfernt ist. Sowohl die räumlicheVerteilung der Sterne, als auch die Bewegungen im Galaktischen System haben sich als viel komplizierter erwiesen und der lineare Maßstab dieses Systems als viel größer herausgestellt, als sie sich auf Grund der von SEELIGER und KAPTEYN eingeführten, heute als nicht haltbar erkanntenVoraussetzungen ergeben hatten, so daß das von uns bis jetzt schlecht und recht erforschte Raumgebiet nur einen kleinen Teil des zu untersuchenden Gesamtsystems erfaßt und keinesfalls schon zu Schlüssen vom Teile aufs Ganze berechtigt. Wenn auch die meisten Astronomen heute wohl der Ansicht sein dürften, daß das Galaktische System, wie so viele andere uns inzwischen bekanntgewordene Sternsysteme, eine spiralförmige Struktur besitzt, so läßt sich diese Vermutung, wegen unserer noch völligen Unkenntnis der genauen räumlichen Verteilung der in ihm zweifellos vorhandenen, ausgedehnten *absorbierenden* kosmischen Gas- und Staubwolken, die uns stellenweise die Aussicht auf weite Raumgebiete sogar vollständig verdecken, sowie wegen der geringen Reichweite der uns heute zur Verfügung stehenden Methoden der Entfernungsbestimmung, noch nicht mit unumstößlichen Tatsachen belegen. Wir befinden uns daher bei allen theoretischen Betrachtungen über das Galaktische System in der äußerst ungünstigen Lage, daß uns dieVerteilung der gravitierenden Massen in diesem System, und somit das Gravitationspotential, unter dessen Einflusse die in ihm wahrnehmbaren Bewegungen erfolgen, praktisch nicht bekannt sind. Bedenkt man, daß auch die in den Bewegungen der Sterne gefundenen Gesetzmäßigkeiten sich nur auf ein ganz kleines, die nähere Umgebung

unserer Sonne bildendes Teilgebiet dieses Systems beschränken, so sieht man, auf wie schwankenden Grundlagen jede ins einzelne gehende Theorie des Galaktischen Systems heute noch stehen muß. Immerhin ist im Laufe der letzten Dezennien ein nicht unbeträchtliches Beobachtungsmaterial zusammengebracht und verarbeitet worden, das nach einer theoretischen Deutung verlangt und eine solche zum Teil schon erhalten hat, und es wird daher am übersichtlichsten sein, wenn wir unsere Betrachtungen über unser Sternsystem mit einer kurzen Zusammenfassung der wesentlichsten uns bekannt gewordenen Tatsachen und Gesetzmäßigkeiten anfangen, die das Rohmaterial der später aufzurichtenden Theorie darstellen.

Die empirischen Tatsachen

Diese empirischen Tatsachen teilen wir in zwei Gruppen ein, je nachdem sie sich A. auf die räumliche Verteilung oder B. auf die Bewegungsvorgänge beziehen.

A. Die räumliche Verteilung

1. Die grundlegende, schon seit Jahrhunderten bekannte Tatsache in der räumlichen Anordnung der Sterne des Galaktischen Systems ist die außerordentlich flache Form dieses Gebildes, und das Bestehen in ihm einer Symmetrieebene, in deren unmittelbarer Nähe sich die allermeisten Systemsterne befinden. Die *starke Abplattung* der Galaxie ist schon aus dem ersten aus den Beobachtungen (Sternabzählungen) von W. Herschel abgeleiteten Modell unseres Sternsystems klar zu ersehen, und sie ist durch alle späteren Untersuchungen über die Verteilung der verschiedenen astronomischen Objekte, wie der Sterne verschiedener physikalischer Typen, der Gasnebel und planetarischen Nebel, der offenen Sternhaufen und bis zu einem gewissen Maße auch der kugelförmigen Sternhaufen bestätigt worden.

2. Seit etwa zwanzig Jahren ist durch die Untersuchungen von H. Shapley über die räumliche Verteilung der kugelförmigen Sternhaufen, deren Entfernungen mit Hilfe der in ihnen enthaltenen veränderlichen Sterne (Cepheiden) — durch Vergleich ihrer scheinbaren Helligkeiten mit ihrer aus anderen Beobachtungen ermittelten absoluten Leuchtkraft, die eine Korrelation mit der Periode des Lichtwechsels zeigt — bestimmt werden konnten, die Tatsache ermittelt worden, daß unsere Sonne im Galaktischen System eine ganz exzentrische Lage einnimmt. Dieses System besitzt eine klar erkennbare Zentralverdichtung, die aus einer Ansammlung mächtiger Sternwolken besteht, gegen die sich alle massiveren Objekte, wie die planetarischen Nebel, die

absolut sehr hellen und heißen sog. Wolf-Rayet-Sterne usw. konzentrieren, und die in der durch die galaktischen Koordinaten[1])

$$B_G = 0^\circ; \quad \Lambda_G = 326^\circ \tag{1}$$

gekennzeichneten Richtung (im Sternbilde des Sagittarius) in einer noch nicht sehr genau bestimmten Entfernung von uns, die aber etwa zwischen den Grenzen von 10 000 und 20 000 Parsec enthalten sein dürfte, liegt. Dieses SHAPLEYsche *galaktische Zentrum* stellt den geometrischen Schwerpunkt der von dem genannten Forscher bestimmten räumlichen Verteilung der etwa 90 uns bekannten, zu unserem Sternsystem gehörigen Kugelhaufen dar, die sich, wie die Sterne, zu beiden Seiten der Milchstraßenebene symmetrisch in Form eines etwas abgeplatteten Gebildes lagern, wobei jedoch nicht unerwähnt bleiben darf, daß eine Berücksichtigung der kosmischen Absorption bei der Berechnung der Entfernungen der einzelnen Kugelhaufen — so weit sich eine solche heutzutage schon in Rechnung stellen läßt — diese Abplattung beinahe zum Verschwinden zu bringen scheint. Da ein näheres Eingehen auf die SHAPLEYsche Methode und die mit ihrer Hilfe gefundenen, zum Teil nur vermuteten Eigentümlichkeiten der räumlichen Verteilung der Kugelhaufen hier zu weit führen würde, muß auf die Originalarbeiten SHAPLEYS, die auch im Lehrbuch der Stellarstatistik des Verfassers ausführlich zitiert und besprochen sind, verwiesen werden.

3. Die räumliche Sterndichte in dem unsere Sonne umgebenden Teile des Galaktischen Systems ist etwa gleich einem Sterne pro 10 Kubikparsec, jedoch scheint auch diese geringe Sterndichte schon einer schwachen Verdichtung der Sterne zu entsprechen, da die Sterndichte in Richtung des galaktischen Zentrums nicht stetig zuzunehmen scheint. Viele Forscher neigen daher heute noch zu der Annahme, daß die uns umgebenden Sterne innerhalb des großen Galaktischen Systems ein «Lokales Sternsystem» bilden, dessen Konturen durch die Verteilung der sehr massiven Sterne der Spektralklasse *B* markiert werden, und dessen Mittelpunkt nach einer Bestimmung von CHARLIER in der durch die galaktischen Koordinaten $\Lambda = 224^\circ$, $B = -14^\circ$ bezeichneten Richtung, in einer Entfernung von etwa 65 Parsec von der Sonne liegt.

---

[1]) Die galaktischen Koordinaten, deren Gebrauch bei allen Problemen der Struktur und Bewegung des Milchstraßensystems sich von selbst empfiehlt, benutzen als Grundebene den galaktischen Äquator – die Symmetrieebene der Galaxie –, von dem aus die galaktische Breite β gerechnet wird. Die galaktische Länge λ wird von dem aufsteigenden Knoten (Schnittpunkte) des galaktischen Äquators auf dem Himmelsäquator in positivem Sinne (entgegen dem Uhrzeiger) gerechnet. Die aequatorialen Koordinaten des *galaktischen Nordpols* sind annähernd gleich:

$$\delta_{GNP} = +27^\circ; \quad {}_{GNP} = 191^\circ .$$

4. Die räumliche Verteilung der Sterne verschiedener Spektralklassen, und namentlich ihre Konzentration gegen die galaktische Ebene, sind merklich voneinander verschieden; die Sterne der «frühen» Spektralklassen B und A scheinen im Raume viel stärker abgeplattete Konfigurationen zu bilden, als die roten Sterne der Klasse M.

B. Die Bewegungen.

1. Die Sterne der näheren Umgebung der Sonne (und hierzu gehören so ziemlich alle Sterne, bei denen eine Eigenbewegung festgestellt werden konnte und ein großer Teil derjenigen, für die Radialgeschwindigkeiten vorliegen) scheinen in ihrer Gesamtheit an ihr vorbeizuströmen, und zwar in einer Richtung, die durch einen bestimmten Punkt auf der Himmelssphäre bezeichnet wird, den man den «Antapex» der Sonne nennt. Dieser Effekt kann natürlich am einfachsten durch die Annahme erklärt werden, daß sich die Sonne selbst in bezug auf die ganze, sie unmittelbar umgebende Sterngruppe in der entgegengesetzten Richtung bewegt, also auf den dem Antapex diametral gegenüberliegenden Punkt — den *Apex* der Sonnenbewegung — zu. Die äquatorialen Koordinaten des Sonnenapex sind sehr oft und unter Benutzung sehr verschieden zusammengesetzten Beobachtungsmaterials an Eigenbewegungen und Radialgeschwindigkeiten sowie verschiedener Rechenverfahren bestimmt worden. Die Ergebnisse liegen alle nahe bei den Werten

$$A = 270^\circ; \quad D = +30^\circ \quad , \tag{2}$$

was den galaktischen Koordinaten

$$\Lambda_{\mathrm{Apex}} = 22^\circ; \quad B_{\mathrm{Apex}} = +20^\circ$$

entspricht. Denken wir uns durch den Apex und den Antapex irgend einen größten Kreis gezogen, und bilden für eine Reihe von nicht zu ausgedehnten, auf diesem Kreise liegenden Himmelsbereichen die Mittelwerte der Radialgeschwindigkeiten ϱ und der Eigenbewegungen μ der in ihnen enthaltenen Sterne, wobei wir letztere in zwei aufeinander senkrechte Komponenten, v — längs dem erwähnten größten Kreise (die «parallaktische» Komponente) — und τ, senkrecht zu ihm (die «transversale» Komponente), zerlegen, dann zeigen die Mittelwerte der ϱ und der v längs dem Kreise einen Gang mit dem Winkelabstande ψ des Bereiches vom Apex, der sich jeweils durch eine *einfache Sinuswelle* darstellen läßt:

$$\bar{\varrho} = V_\odot \cos\psi \, ; \quad \bar{v} = v_0 \sin\psi \, . \tag{3}$$

Der Wert $V_\odot$ der in die erste dieser Formeln eingehenden Geschwindigkeit, die augenscheinlich die nach dem Apex (2) gerichtete Geschwindigkeit der Sonne in bezug auf die betrachtete Sterngruppe in linearem Maße (z. B.

km/sec) darstellt, ist je nach der benutzten Sterngruppe etwas verschieden und zeigt gewisse charakteristische Unterschiede für Sterne verschiedener Spektralklassen, auf die an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden soll; im Durchschnitte ist er für die Sterne der Sonnenumgebung etwa gleich

$$V_{\odot} = 20 \text{ km/sec} . \tag{4}$$

In der zweiten Formel (3) ist die Amplitude v_0 der Welle dagegen gleich der Geschwindigkeit der Sonne in Winkelmaß, so wie sie aus einer Entfernung erscheinen würde, die gleich der mittleren Entfernung der Sterne der benutzten Sterngruppe von der Sonne wäre. Wenn die lineare Geschwindigkeit der Sonne mit Hilfe der Radialgeschwindigkeiten der Sterne nach der ersten Formel (3) bestimmt ist, kann das Ergebnis der Behandlung ihrer Eigenbewegungen nach der zweiten dieser Formeln, d. h. der Wert v_0, zur Abschätzung der *mittleren Entfernung* (mittleren Parallaxe) der betrachteten Sterngruppe dienen.

Die durch (2) und (4) bestimmte Bewegung der Sonne in bezug auf die Sterne ihrer nächsten Umgebung bietet, als Bewegung eines einzelnen Sternes des Galaktischen Systems, keinerlei theoretisches Interesse und stellt nur einen ersten, groben Effekt dar, für den die Geschwindigkeiten der Sterne zu korrigieren sind, damit die in ihnen eventuell enthaltenen feineren, für das Verständnis des Bewegungszustandes des Systems wirklich sinnvollen Gesetzmäßigkeiten erkennbar werden. Wenn keine weiteren Gesetzmäßigkeiten in den Geschwindigkeiten enthalten wären, müßten die räumlichen Komponenten letzterer, nach Abzug der Komponenten der Sonnenbewegung (4), gemäß den Gesetzen des Zufalls, d. h. nach einem MAXWELLschen Gesetze, verteilt sein.

2. Die für die Sonnenbewegung korrigierten Geschwindigkeiten der Sterne unserer Umgebung sind *nicht* nach einem MAXWELLschen Gesetze verteilt, sondern zeigen die Tendenz, sich mit Vorliebe um eine ganz bestimmte Doppelrichtung im Raume zu häufen. Diese von KAPTEYN entdeckte Erscheinung ist von ihm und A. S. EDDINGTON in dem Sinne gedeutet worden, daß die Sterne in der Umgebung der Sonne zwei sich gegenseitig durchsetzenden *Sternströmen* angehören, deren Relativgeschwindigkeit etwa 30 km/sec beträgt. Nach der Annahme EDDINGTONS sollen die Geschwindigkeiten der Sterne innerhalb jedes der beiden Sternströme nach einem MAXWELLschen Gesetze verteilt sein, wobei die Streuung für beide Ströme gleichgesetzt werden darf. Wenn also u', v', w', bzw. u'', v'', w'', die auf irgendein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogenen Komponenten der Geschwindigkeiten der beiden Sternströme in bezug auf die Sonne bedeuten, und ν_1, ν_2 die Anzahl der jedem Strome angehörenden Sterne in der Volumeneinheit

des Raumes, dann soll nach dieser Vorstellung die Anzahl der Sterne in dieser Volumeneinheit, deren Geschwindigkeitskomponenten in bezug auf die Sonne in das Intervall u bis $u + du$, v bis $v + dv$, w bis $w + dw$ fallen, durch den Ausdruck

$$\left\{\nu_1 \frac{h^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-h^2[(u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2]} + \right. \\ \left. + \nu_2 \frac{h^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-h^2[(u-u'')^2+(v-v'')^2+(w-w'')^2]}\right\} du\, dv\, dw \qquad (5)$$

gegeben werden. Durch ein Verfahren, dessen Schilderung an dieser Stelle zu viel Raum beanspruchen würde, läßt sich mit Hilfe dieses Ansatzes aus den Eigenbewegungen der Sterne in einer Reihe von den Himmel überdeckenden Bereichen sowohl die Geschwindigkeit der Sonne in bezug auf den *Schwerpunkt* beider Sternströme, als auch ihre gegenseitige Geschwindigkeit und die Richtung, längs der sie sich bewegen, bestimmen. (Siehe die Originalarbeiten von A. S. EDDINGTON, die auch in W. M. SMART, Stellar Dynamics, und E. v. d. PAHLEN, Lehrbuch der Stellarstatistik, ausführlich zitiert und besprochen sind.) Es erweist sich, daß diese Richtung in der galaktischen Ebene liegt und durch die beiden einander diametral gegenüberliegenden *Vertexpunkte*, deren galaktischen Koordinaten nach EDDINGTON gleich

$$B_{\text{vertex}} = 0^0\,; \quad \Lambda_{\text{vertex}} = 347^0 \text{ bzw. } 157^0 \qquad (6)$$

sind, gegeben wird.

Eine andere Deutung der von KAPTEYN entdeckten, von den Sterngeschwindigkeiten bevorzugten Doppelrichtung hat K. SCHWARZSCHILD gegeben, der die Hypothese einführte, daß die Geschwindigkeitsverteilung der Sterne in der Umgebung der Sonne durch eine einzige Exponentialfunktion dargestellt werden kann, deren Exponent jedoch nicht auf Kugeloberflächen, sondern auf Rotationsellipsoiden einen konstanten Wert behält. Nach dieser unitarischen Darstellung der Häufigkeitsverteilung der Sterngeschwindigkeiten mittelst eines erweiterten MAXWELLschen Gesetzes, ist die Anzahl der Sterne in der Volumeneinheit, deren Geschwindigkeitskomponenten im Intervalle u bis $u + du$, v bis $v + dv$, w bis $w + dw$ liegen, gleich

$$\nu \frac{k h^2}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-k^2(u-u_0)^2 - h^2[(v-v_0)^2+(w-w_0)^2]} \cdot du\, dv\, dw\ , \qquad (7)$$

wo u_0, v_0, w_0 die Komponenten der Sonnengeschwindigkeit in bezug auf den Schwerpunkt der betrachteten Sterne, ν die Anzahl der Sterne in der Volumeneinheit, und h und k zwei Konstanten sind. In Formel (7) sind die Koordinatenachsen so gewählt zu denken, daß die X-Achse (längs der die u-Komponente der Geschwindigkeit liegt), parallel zu der Richtung größter

Beweglichkeit der Sterne, also der Vertexrichtung verläuft; dann muß $h > k$ sein, damit die größte Achse des «Geschwindigkeitsellipsoids» gleichfalls in diese Richtung fällt; $\frac{kh^2}{\pi^{\frac{3}{2}}}$ ist dabei einfach ein Normierungsfaktor. Als Geschwindigkeitsellipsoid pflegt man das Gebilde zu bezeichnen, welches dadurch erhalten wird, daß man den quadratischen Ausdruck im Exponenten von (7) gleich 1 setzt:

$$k^2(u-u_0)^2 + h^2[(v-v_0)^2 + (w-w_0)^2] = 1 \tag{8}$$

und die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w als laufende Koordinaten im Geschwindigkeitsraume auffaßt. Dann sind die Koeffizienten h und k einfach gleich den inversen Werten der Achsen des Rotationsellipsoids (8) und hängen auch in einfacher Weise mit den *Mittelwerten* der entsprechenden, von der Sonnenbewegung befreiten Geschwindigkeitskomponenten

$$U = u - u_0\,; \quad V = v - v_0\,; \quad W = w - w_0 \tag{9}$$

zusammen. Die Gesamtzahl der Sterne mit u-Komponenten zwischen u und $u + du$ wird aus (7) durch Integration über alle v und w zu

$$\frac{\nu k h^2}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-k^2U^2} dU \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2V^2} dV \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2W^2} dW = \frac{\nu k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2U^2} dU$$

erhalten, und der Mittelwert von U, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, ist daher durch

$$\nu \overline{U} = \frac{2\nu k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} U e^{-k^2U^2} dU$$

gegeben, woraus unmittelbar

$$\overline{U} = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \tag{10}$$

folgt. In ganz analoger Weise erhält man auch

$$\overline{V} = \overline{W} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \tag{11}$$

Die Analyse der Eigenbewegungen zahlreicher Gruppen von Sternen verschiedener Spektralklassen durch SCHWARZSCHILD selbst sowie seine Mitarbeiter hat zu einer Darstellung der Beobachtungsergebnisse geführt, die weder besser noch schlechter ist, als die mit Hilfe der Zweistrom-Theorie zu erzielende. Die Lage der großen Achse des SCHWARZSCHILDschen Rotationsellipsoids stimmt nahe mit der von EDDINGTON bestimmten Vertexrichtung überein. Für das Verhältnis der beiden Ellipsoidenachsen haben sich immer

Werte ergeben, die zwischen 0.4 und 0.7 lagen. Wir merken uns für den weiteren Gebrauch, daß für das Galaktische System in der Umgebung der Sonne genähert

$$k/h = 0.6 \tag{12}$$

gilt. Die SCHWARZSCHILDschen Untersuchungen sind von CHARLIER, W. GYLLENBERG und S. WICKSELL im Anschlusse an die von CHARLIER entwickelte Theorie der Korrelationen, auf den Fall des Bestehens einer normalen Korrelation zwischen den Geschwindigkeitskomponenten, also auf den Fall eines *dreiachsigen* Ellipsoids ausgedehnt worden.[2])

3. Die unter 2. besprochene Bestimmung der räumlichen Gestalt des Geschwindigkeitskörpers der Sterne unserer Umgebung beruht auf der Voraussetzung, daß wir in allen Teilen des Himmels *denselben* Geschwindigkeitskörper, nur unter verschiedenen Blickrichtungen sehen, so daß der räumliche Geschwindigkeitskörper gewissermaßen aus der Gesamtheit seiner Projektionen auf eine unendliche Anzahl von ihn durchsetzenden Schnittebenen rekonstruiert wird. Natürlich muß dann wenigstens in erster Näherung die Annahme gemacht werden, daß dieser Körper, sowohl in bezug auf seine Gestalt und Orientierung, als auch in bezug auf seine Lage im Geschwindigkeitsraume (die Koordinaten u_0, v_0, w_0 in Formel (7)) in allen Raumteilen, auf die sich unsere Beobachtungen erstrecken, mit sich identisch bleibt. Nun hat sich aber im Laufe der letzten Dezennien herausgestellt, daß dies nicht der Fall ist, sondern daß die auf verschiedene Raumgebiete unserer Umgebung bezüglichen Geschwindigkeitskörper in merkwürdiger Weise gegeneinander (im Geschwindigkeitsraume) verschoben sind. Da diese Verschiebungen längs dem galaktischen Äquator (also für die Milchstraßenzone) am deutlichsten hervortreten, wollen wir uns an dieser Stelle allein auf ihre Betrachtung beschränken. Wir fassen also eine Reihe von nicht zu großen Himmelsbereichen ins Auge, die alle längs dem galaktischen Äquator liegen, und bilden für jeden dieser Bereiche die Mittelwerte der Radialgeschwindigkeiten $\bar{v}_R$, und der in die Milchstraßenebene fallenden Komponenten der Eigenbewegungen $\bar{v}_{T\lambda}$ aller in dem Bereich liegenden Sterne. Da wir hier nur das Verhalten dieser Mittelwerte studieren wollen und von der *Streuung* der Einzelwerte ganz absehen, durch die die Gestalt des Geschwindigkeitskörpers bestimmt wird, werden sich unsere Ergebnisse ausschließlich auf das Verhalten der *Schwerpunkte* der Geschwindigkeitskörper beziehen. Es zeigt sich nun, daß wenn die jeweilige Komponente der Apexialbewegung der Sonne (siehe (1)) in jedem Bereiche von den Sternge-

---

[2]) Auch über alle diese Untersuchungen finden sich nähere Angaben und ausführliche Literaturnachweise in den oben zitierten Büchern von W. M. SMART und E. v. d. PAHLEN.

schwindigkeiten abgezogen ist, die Mittelwerte der «Restgeschwindigkeiten» keineswegs alle gleich Null sind, sondern daß dies z. B. für die Radialgeschwindigkeiten nur für vier Punkte auf dem galaktischen Äquator der Fall ist, die in gleichen Abständen von 90° voneinander liegen; dazwischen liegen aber zwei Maxima und zwei Minima, so daß der Gang mit der galaktischen Länge durch eine *Doppelwelle* dargestellt werden kann. Für die mittleren, für Sonnenbewegung korrigierten Radialgeschwindigkeiten haben wir

$$\bar{v}_R = C \sin 2\lambda + D \cos 2\lambda \quad , \tag{13}$$

was auch durch die Substitution

$$C = A\bar{r} \cos 2\lambda_0 \quad D = -A\bar{r} \sin 2\lambda_0$$

auf die Form

$$\bar{v}_R = A\bar{r} \sin 2(\lambda - \lambda_0) \tag{14}$$

gebracht werden kann. Die Amplitude dieser Doppelwelle ist $A\bar{r}$, und es erweist sich, daß sie um so größer erhalten wird, je größer die *mittlere Entfernung* der betrachteten Sterngruppe (B-Sterne, A-Sterne, Sterne mit der c-Charakteristik usw.) ist. Aus diesem Grunde ist sie in (14) in der Form $A\bar{r}$ geschrieben worden, wobei $\bar{r}$ die mittlere Entfernung der Gruppe in Parsec bedeutet, während A eine für alle Gruppen gemeinsame Konstante darstellt. In gleicher Weise ergibt sich für die mittleren transversalen Komponenten, in der galaktischen Ebene $\bar{v}_{T\lambda}$, die natürlich aus den Beobachtungen in Bogenmaß erhalten werden, und zur Verwandlung in lineares Maß mit der mittleren Entfernung $\bar{r}$ der Gruppe multipliziert werden müßten

$$\bar{v}_{T\lambda} = \bar{v}_\lambda \bar{r} = A\bar{r} \cos 2(\lambda - \lambda_0) + B\bar{r} \ , \tag{15}$$

wo A dieselbe Konstante wie in (14) ist, während B eine neue Konstante bedeutet. Die mittleren Geschwindigkeiten in galaktischer Länge zeigen also im Gegensatze zu den mittleren Geschwindigkeiten in radialer Richtung außer der reinen Doppelwelle noch einen konstanten Bestandteil, so daß die Sterne eine Kreisbewegung um die Sonne mit der Winkelgeschwindigkeit B auszuführen scheinen. Bei den Radialgeschwindigkeiten liegen die Maxima, wie aus (14) zu ersehen, bei

$$\lambda - \lambda_0 = 45^\circ \quad \text{und} \quad \lambda - \lambda_0 = 225^\circ ,$$

die Minima bei

$$\lambda - \lambda^0 = 135^\circ \quad \text{und} \quad \lambda - \lambda_0 = 315^\circ .$$

Bei der transversalen Bewegung in galaktischer Länge liegen dagegen nach (15) die Maxima der Doppelwelle bei

$$\lambda - \lambda_0 = 0^\circ, 180^\circ ,$$

und die Minima bei

$$\lambda - \lambda_0 = 90^\circ,\ 270^\circ.$$

Die Bestimmung der numerischen Werte der in Formeln (14) und (15) eingehenden Konstanten A, B, λ_0, geschieht durch Einsetzen der empirischen Werte von $\bar{v}_R$ und $\bar{v}_{T\lambda}$ in die linken Seiten dieser Gleichungen für die verschiedenen durch ihre galaktische Länge λ gekennzeichneten Bereiche und Auflösung dieses Systems von Bedingungsgleichungen nach A, B, λ_0, nach der Methode der kleinsten Quadrate. Für die beiden Konstanten A und B, die man aus einem erst später zu erklärenden Grunde, die *Oortschen Konstanten der differentiellen galaktischen Rotation* nennt, ergaben sich die Werte[3])

$$\begin{aligned} A &= +\,0{,}0155 \pm 0{,}0009\ \text{km/sec pro Parsec} \\ B &= -\,0{,}0122 \pm 0{,}0018\ \text{km/sec pro Parsec,} \end{aligned} \tag{16}$$

während für λ_0 aus verschiedenen Sterngruppen von einander etwas abweichende Werte gefunden wurden, die aber alle ziemlich gut mit dem Werte der galaktischen Länge des SHAPLEYschen Zentrums $\Lambda_G = 326^\circ$ übereinstimmten.

4. Für gewisse Sterngruppen, so vor allem die Gruppe der dem Spektraltypus B gehörenden Sterne, die sich sehr stark um die Milchstraßenebene konzentrieren, hat die mittlere Radialgeschwindigkeit in allen Bereichen einen positiven Wert, indem sich der Doppelwelle eine konstante lineare Verschiebung überlagert und der über den ganzen Umkreis des galaktischen Äquators (bzw. über den ganzen Himmel) genommene Mittelwert ihrer Radialgeschwindigkeiten einen positiven Wert ergibt, so daß das System der durch diese Eigentümlichkeit ausgezeichneten Sterne zu *expandieren* scheint. Auch für gewisse andere Sterngruppen hat es sich als notwendig erwiesen, der Formel (14) noch ein konstantes Glied hinzuzufügen, sie also in der zu (15) analogen Form

$$\bar{v}_R = A\bar{r}\sin 2(\lambda - \lambda_0) + K \tag{17}$$

---

3) Der hier angeführte Wert von A ist einer Arbeit von J. S. PLASKETT und J. A. PEARCE (Publ. Dom. Astr. Obs. Victoria, *5*, 294, 1936), der Wert von B — einer Arbeit derselben Autoren (Monthly Notices *94*, 1934) — entnommen. Die Konstante B wird zunächst in Bogenmaß — in Bogensekunden pro Jahr — erhalten und muß, um in km/sec umgerechnet zu werden, mit dem Umrechnungsfaktor $k = 4{,}74$ multipliziert werden, der die Geschwindigkeit in km/sec angibt, die in einer Entfernung von 1 Parsec einer Eigenbewegung von $1''$ pro Jahr entspricht. (In einer Entfernung von 1 Parsec erscheint definitionsmäßig eine Strecke von der Länge der großen Halbachse der Erdbahn, also $a = 1{,}49 \cdot 10^8$ km, unter einem Winkel von $1''$. Eine Eigenbewegung von $1''$ pro Jahr entspricht also in dieser Entfernung einer linearen Geschwindigkeit von a km/Jahr, oder $a/T^s = k = 4{,}74$ km/sec, wenn $T^s = 3{,}1572 \cdot 10^7$ die Anzahl der Sekunden im Jahre bezeichnet.) Der dem in (16) angegebenen Werte von B entsprechende Wert in Bogenmaß ist:

$$B/k = 0'',0026.$$

zu schreiben, wobei jedoch das K sowohl positive, als auch negative Werte, je nach der betrachteten Sterngruppe, haben kann. Dieser schon 1910 von W. Campbell zuerst bei den B-Sternen entdeckte Effekt, den er als Zusatzglied in die bekannte Formel für die Bestimmung der Apexbewegung der Sonne aus Radialgeschwindigkeiten einführte und mit dem Buchstaben K bezeichnete, so daß letztere die Form annahm

$$\bar{v}_R = -X_{\odot} \cos\alpha \cos\delta - Y_{\odot} \sin\alpha \cos\delta - Z_{\odot} \sin\delta + K_1 \,, \qquad (18)$$

wird auch heute allgemein als *K-Effekt* bezeichnet[4]). Für die B-Sterne ergab sich sein Wert zu etwa + 4 km/sec, bei anderen Sterngruppen ist er meistens kleiner, bei vielen verschwindend und bei einigen sogar negativ.

5. Die Verteilung der Bewegungsrichtungen der am schnellsten gegen die Sonne bewegten Sterne — der sog. *Schnelläufer* — ist eine völlig *asymmetrische,* indem diese Richtungen beinahe ausschließlich in der Hemisphäre um den in der galaktischen Ebene bei etwa $\lambda = 237^{\circ}$ liegenden Punkt zu finden sind, die andere Hemisphäre aber in höchst auffallender Weise meiden; zwischen den galaktischen Längen 5° und 100° ist sogar überhaupt keine einzige große Sterngeschwindigkeit vorhanden. Dabei können als «Schnelläufer» diejenigen Sterne definiert werden, deren *auf die Sonne bezogene Raumgeschwindigkeiten* den Wert von 65 km/sec übersteigen. Es ist zu beachten, daß die Mitte des von den Schnelläufergeschwindigkeiten bevorzugten Richtungsbereiches etwa in 90° Abstand von der Richtung auf das Zentrum des Galaktischen Systems liegt (s. Abb. 5).

Diese für die Schnelläufer absolute *Asymmetrie* der Geschwindigkeitsverteilung, die von B. Boss, Adams und Joy, Raymond und Wilson, Strömberg und Oort entdeckt und einwandfrei nachgewiesen worden ist, tritt nach Ansicht einiger Forscher in abgeschwächter Form auch bei anderen Sterngruppen auf, so daß sie eine allgemeine Eigentümlichkeit der Struktur des Galaktischen Systems zum Ausdrucke zu bringen scheint. Aus den Untersuchungen

---

[4]) In dieser Formel bedeuten die Grössen $X_{\odot}$, $Y_{\odot}$, $Z_{\odot}$ die Komponenten der Sonnengeschwindigkeit in einem orthogonalen äquatorialen Koordinatensystem, α und δ die Rektaszension und Deklination des Mittelpunktes des Bereiches, für das der Mittelwert $\bar{v}_R$ der Radialgeschwindigkeiten gebildet wird, so dass die drei ersten Summanden auf der rechten Seite zusammen die Projektion der Sonnengeschwindigkeit auf den nach diesem Mittelpunkte gerichteten Radius-Vektor, oder die radiale Komponente der Sonnengeschwindigkeit für das betrachtete Gebiet ergeben. Zwei analoge Formeln können für die beiden (zunächst in Bogenmaß ausgedrückten) «Eigenbewegungskomponenten» der Sonne in bezug auf die im Bereiche liegende Sterngruppe aufgestellt werden, aus denen dann, zusammen mit Gleichung (18), die Komponenten der Sonnenbewegung durch eine Ausgleichsrechnung erhalten werden. Die Betrachtung der zahlreichen Varianten dieses Gleichungssystems und seiner Auflösung würde hier viel zu weit führen, und es muß daher wegen aller weiteren Einzelheiten auf die Lehrbücher von W. M. Smart und E. v. d. Pahlen (Kapitel über Apexbestimmungen der Sonnenbewegung) verwiesen werden.

G. STRÖMBERGS geht hervor, daß wenn man die Sterne in verschiedene Gruppen nach ihrer physikalischen Beschaffenheit und nach den charakteristischen Merkmalen ihrer räumlichen Verteilung (stärkere oder schwächere Konzentration gegen die Milchstraßenebene usw.) einteilt, und die Bewegungsverhältnisse dieser Gruppen einzeln studiert, die Schwerpunkte der sich für sie ergebenden «Geschwindigkeitskörper» gegeneinander verschoben erscheinen, und zwar längs einer geraden Linie, die nur schwach gegen die Milchstraßenebene geneigt ist und in der galaktischen Länge 61° – 241°, also wieder nahezu rechtwinkelig zur Richtung nach dem galaktischen Zentrum, verläuft.

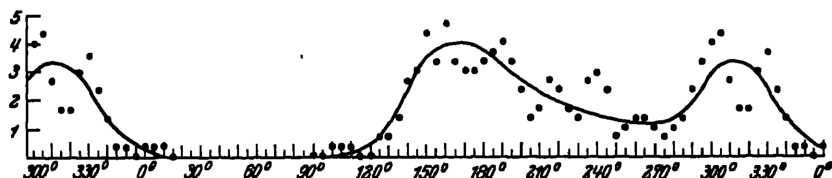


Abb. 5
Verteilung der Apices der Geschwindigkeiten der «Schnelläufer» in galaktischer Länge.

Zwischen der Größe dieser *asymmetrischen Verschiebung der Geschwindigkeitskörper*, die wir mit S bezeichnen wollen, und der durch die mittlere quadratische Restgeschwindigkeit ausgedrückten *Geschwindigkeitsstreuung* jeder Gruppe, die mit σ bezeichnet werden möge, besteht eine nahezu parabolische Beziehung, die sich aus den Untersuchungen Strömbergs zu

$$S = -0.0323\,\sigma^2 - 5.7 \qquad (19)$$

ergeben hat. Die Vorzeichen erklären sich aus der Wahl der Achsenrichtungen in Abb. 6, welche die Projektionen der Geschwindigkeitskörper der einzelnen Gruppen auf die Milchstraßenebene in Gestalt von Kreisen und Ovalen darstellen. Die Einteilung der Sterne in Gruppen war keine sehr systematische: so bedeuten die Gruppen I und II die Sterne der beiden wichtigsten «lokalen Sternströme» — des Ursa Major- und des Taurusstromes — III die B-Sterne (für die die STRÖMBERGsche Beziehung nicht erfüllt ist). IV die A-Sterne, V und VI Sterne der Spektralklassen F, G, K, M mit mäßig großen Geschwindigkeiten, X die Schnelläufer, XI die Kugelhaufen usw. (s. ausführlicher in der Originalarbeit Ap. J. *59*, *229*, *1923*, oder E. v. d. PAHLEN, Lehrbuch der Stellarstatistik), und bei der Behandlung des Materials für die verschiedenen Gruppen sind nicht immer alle in ihm enthaltenen ausgesprochenen Schnelläufer von vornherein ausgeschlossen worden, was die Ergebnisse eines Teils ihrer Überzeugungskraft beraubt; jedoch hat sich auch für dieses Phänomen eine theoretische Deutung finden lassen, weshalb

es nicht übergangen werden darf. Es erwies sich, daß die Sterngruppen, welche die größte asymmetrische Verschiebung im Vergleiche zu dem Schwerpunkte des Geschwindigkeitskörpers der Kugelhaufen zeigen und die kleinste Geschwindigkeitsstreuung aufweisen, auch die stärkste galaktische Konzentration besitzen, d. h., daß die Abplattung ihrer räumlichen Verteilung um so größer wird, je kleiner die innere Streuung ihrer Geschwindigkeiten und je stärker ihre asymmetrische Verschiebung in bezug auf die Kugelhaufen ist.

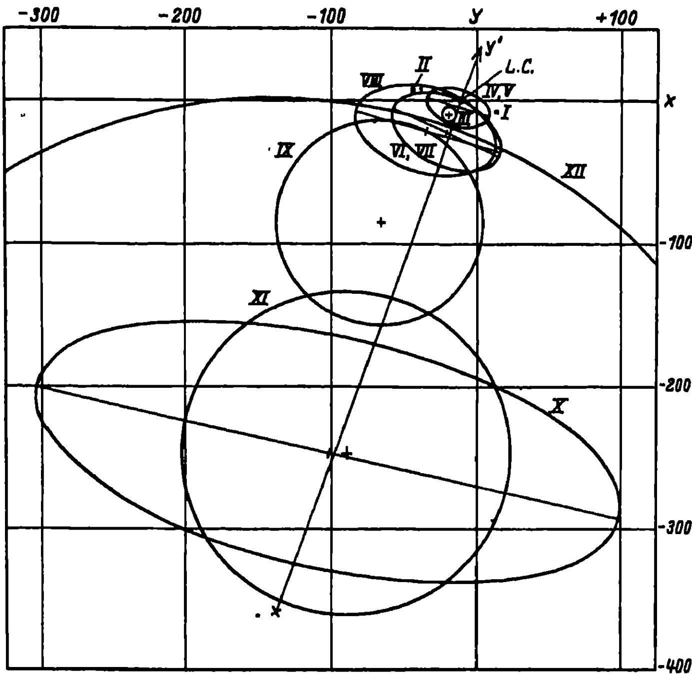


Abb. 6

Gegenseitige Verschiebung der Geschwindigkeitskörper verschiedener Sterngruppen, nach G. Strömberg.

6. Die zahlreichen Apexbestimmungen, die immer für die Größe und Richtung der Sonnengeschwindigkeit Werte ergeben, die sich nur wenig von den unter 1. angeführten unterscheiden, beziehen sich auf Sterngruppen, deren mittlere Entfernung von der Sonne höchstens von der Größenordnung von einem paar Hundert Parsec ist. Zu einem gänzlich anderen Ergebnis führt eine Bestimmung der Sonnengeschwindigkeit in bezug auf die etwa 20 Kugelhaufen, deren Radialgeschwindigkeiten seit den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts vor allem durch die Arbeiten von V. M. Slipher bekannt geworden sind, und deren mittlere Entfernung von der Größenordnung von

mindestens 10000 Parsec sein dürfte. Solche Bestimmungen sind von K. Lundmark (1923)[5]), G. Strömberg (1925)[6]), S.W. Shiveshwarkar (1935)[7]), H. Mineur (1935)[8]), Edmondson (1935)[9]) und G. L. Camm (1939)[10]) ausgeführt worden. G. Strömberg fand aus den 18 im Jahre 1925 bekannten Radialgeschwindigkeiten eine Sonnengeschwindigkeit von

$$V_{\odot} = 286\,\text{km/sec} \text{ bis } 329\,\text{km/sec} \tag{20}$$

mit den (galaktischen) Apexkoordinaten

$$A_{\odot} = 71^{0}, \quad B_{\odot} = +11^{0}. \tag{21}$$

Zieht man die in (2), (4) gegebene «gewöhnliche» Sonnenbewegung von der hier gefundenen ab (die galaktischen rechtwinkligen Komponenten der «gewöhnlichen» Sonnengeschwindigkeit, d. h. der Sonnengeschwindigkeit in bezug auf die die nächste Umgebung der Sonne bildenden Sterngruppen, sind rund $X'_{\odot} = +17$, $Y'_{\odot} = +7$, $Z'_{\odot} = +7$), so ergibt sich die *Bewegung des Schwerpunktes der die Sonne umgebenden Sterngruppe* (den man das *«Lokale Zentroid»* zu nennen pflegt) in bezug auf die sehr entfernte Gruppe der den Mittelpunkt des Galaktischen Systems umgebenden Objekte sehr großer Masse (der offenbar ein größeres Interesse zukommt, wenn auch der Unterschied beider Bewegungen, wegen der Kleinheit von (4) im Vergleiche zu (20), nicht beträchtlich ist); wir werden diese Geschwindigkeit und die ihr entsprechenden Apexkoordinaten mit dem Index o kennzeichnen. Nach den auf den Radialgeschwindigkeiten von 21 Kugelhaufen fußenden Ergebnissen von Shiveshwarkar sind:

$$V_o = 302\,\text{km/sec}; \quad A_o = 69^{0}; \quad B_o = +10^{0}, \tag{22}$$

und eine gleichzeitige Bestimmung von Edmundson aus den Radialgeschwindigkeiten von 26 Kugelhaufen hat zu dem Wertsystem geführt:

$$V_o = 274\,\text{km/sec} \pm 40\,\text{km/sec}; \quad A_o = 67^{0} \pm 6^{0}; \quad B_o = 1^{0} \pm 8^{0}. \tag{23}$$

Das an diesen Ergebnissen Auffallende ist: 1. die sehr große Geschwindigkeit der Sonne, oder des Lokalen Zentroids, die von der Größenordnung von 300 km/sec zu sein scheint, und 2. die Apexrichtung, die beinahe in der galaktischen Ebene liegt und einen Winkel von annähernd 90° mit der Richtung nach dem Mittelpunkte des Galaktischen Systems bildet.

Gegen die objektive Richtigkeit der oben mitgeteilten Ergebnisse können, trotz ihrer guten Übereinstimmung, ziemlich schwerwiegende Einwände erhoben werden: Die Anzahl der zur Bestimmung der Sonnenbewegung in

---

[5]) Publ. Astr. Soc. Pacific, *35*, 318, 1923. [6]) Ap. J. *61*, 353, 1925. [7]) M. N. *95*, 555, 1935.
[8]) M. N. *96*, 61, 1935. [9]) A. J. *45*, 2, 1935. [10]) M. N. *100*, 45, 1939.

bezug auf die Kugelhaufen verwendbaren Objekte ist, wie wir gesehen haben, eine sehr geringe (nicht über 26); die Verteilung dieser Objekte an der Himmelssphäre ist eine denkbar ungünstige, da ihre überwiegende Mehrzahl, wegen der unter «Räumliche Verteilung» 2. (s. S. 83) hervorgehobenen ganz exzentrischen Lage der Sonne im Galaktischen System, innerhalb eines Intervalls in galaktischer Länge von nur etwa 150° liegt; schließlich erscheint es durchaus nicht ausgeschlossen, daß die zur Apexbestimmung benutzten Haufen systematische Bewegungen besitzen könnten (wie z. B. eine Rotationsbewegung um den galaktischen Mittelpunkt), die sich dann auch in einem nicht näher anzugebenden Maße auch auf die aus ihren Radialgeschwindigkeiten abgeleitete «Sonnenbewegung» verfälschend übertragen würden. Aus allen diesen Gründen darf das oben angeführte Resultat keineswegs als endgültig und unanfechtbar angesprochen werden. Da wir aber zurzeit über kein besseres Beobachtungsmaterial verfügen und auch die von H. MINEUR und von G. L. CAMM unternommenen Versuche, die «inneren Bewegungen» des Systems der Kugelhaufen zu berücksichtigen, noch auf ziemlich willkürlichen Hypothesen beruhen, wird zunächst das Resultat, daß sich die Sonne (und das lokale Zentroid der sie umgebenden Sterne) in einer in der Milchstraßenebene liegenden, mit der Richtung nach dem SHAPLEYschen galaktischen Zentrum einen Winkel von etwa 90° bildenden Richtung im Uhrzeigersinne — also mathematisch gesprochen: im negativen Sinne — mit einer Geschwindigkeit von rund 300 km/sec bewegt, von vielen Forschern als vorläufiger Ausdruck des wahren Sachverhalts akzeptiert[11]).

7. Schließlich sind noch gewisse Unterschiede hervorzuheben, die die Sterne verschiedener Spektralklassen aufweisen, die aber verhältnismäßig

---

[11]) Die Unsicherheit, mit der unsere Kenntnisse von der Bewegung der Sonne in bezug auf die Kugelhaufen noch behaftet sind, kann am besten durch die Mitteilung der von N. U. MAYALL vor kurzem auf Grund der Radialgeschwindigkeiten von 50 Kugelhaufen erhaltenen Ergebnisse veranschaulicht werden. (Die Originalarbeit von N. U. MAYALL ist in Europa noch nicht zugänglich und dem Verfasser nur aus einem der Sternwarte Zürich übersandten Auszuge bekannt.) Für die galaktischen Koordinaten des Sonnenapex sind die Werte

$$A_{\odot} = 51^0 \pm 8^0 \qquad B_{\odot} = 7^0 \pm 9^0$$

erhalten worden, während sich der absolute Betrag der Sonnengeschwindigkeit zu

$$V_{\odot} = 172 \pm 26 \text{ km/sec}$$

ergab. Während also die Richtung der Sonnenbewegung wie früher etwa senkrecht zu ihrem vom Mittelpunkte des Galaktischen Systems aus gezogenen Radiusvektor zu stehen scheint, ist ihre Geschwindigkeit etwa auf die Hälfte des früher bestimmten Wertes herabgesunken. Auch dieses Ergebnis ist aber keineswegs als ein endgültiges zu betrachten, da das Beobachtungsmaterial die nur von der südlichen Halbkugel aus beobachtbaren Kugelhaufen nicht einschloß, so daß die Mehrzahl der benutzten Haufen auf einer Seite des Shapleyschen Mittelpunktes in dem galaktischen Längenintervalle 325° bis 145° lagen.

geringfügiger Natur sind und von denen wir im weiteren nur gelegentlich Gebrauch machen werden.

a) Die von CAMPBELL und MOORE (Lick Publ. *16, 1928*) ausgeführten Apexbestimmungen aus den Radialgeschwindigkeiten der Sterne der Spektralklassen *B, A, F, G, K, M*, unter Hinzunahme eines *K*-Termes (s. unter B. 4.), haben zu etwas verschiedenen Werten der Sonnengeschwindigkeit für die einzelnen Spektralklassen geführt, und zwar fanden sich für die Klassen *B* und *M* die größten Werte — etwa 22 km/sec — während die mittleren Spektralklassen etwas unter 20 km/sec ergaben.

b) Der *K*-Effekt erwies sich nur für die Klassen *B* und *M* als beträchtlich, etwa + 4 km/sec (obgleich dieser Wert auf Grund neuerer Bestimmungen unter Berücksichtigung der unter 3. erwähnten Doppelwelle etwas zu verkleinern wäre); bei den mittleren Spektralklassen ist er augenscheinlich verschwindend klein.

c) Die nach Abzug der Sonnengeschwindigkeit verbleibenden Restgeschwindigkeiten, die den Bewegungszustand der verschiedenen spektralen Gruppen in bezug auf das «Lokale Zentroid» charakterisieren, zeigen einen ziemlich gut ausgeprägten Gang mit der Spektralklasse in dem Sinne, daß sie von den *B*-Sternen bis zu den *M*-Sternen ständig ihrem absoluten Betrage nach größer werden, und zweitens noch, innerhalb jeder Spektralklasse, auch mit abnehmender Leuchtkraft oder «absoluter Helligkeit» — d. h. der Helligkeit, die die Sterne in der Standard-Entfernung von 10 Parsec haben würden — stetig zunehmen. Die nachstehende kleine Tabelle, die einer Arbeit von B. Boss (A. J. *44*, 182, 1935) entnommen ist, gestattet die zwischen der von der Sonnenbewegung befreiten Radialgeschwindigkeit und der Spektralklasse einerseits, und der absoluten Helligkeit andererseits bestehenden Korrelationen zu überschauen.

Tabelle I.

Absolute Helligkeit	Spektralklasse					
	B	A	F	G	K	M
— 1.5	7.7	9.4	12.1	12.0	14.2	16.9
— 0.5	8.9	11.5	13.7	14.3	16.1	20.8
0.5	7.0	12.0	15.2	14.4	17.0	15.9
1.5	—	11.1	12.7	17.4	20.3	18.4
2.5	—	8.7	15.4	20.1	20.4	—
3.5	—	—	14.3	23.8	29.7	—
4.5	—	—	20.6	22.3	21.3	—
5.5	—	—	—	25.4	—	—

Die in der Tabelle eingetragenen Zahlen sind mittlere absolute Radialgeschwindigkeiten in Kilometern pro Sekunde. Die Tabelle zeigt, daß die ab-

solute (von der Komponente der Sonnengeschwindigkeit befreite) Radialgeschwindigkeit von B nach M mit der Spektralklasse wächst und innerhalb jeder Spektralklasse um etwa 1.65 km/sec pro Größenklasse der absoluten Helligkeit zunimmt. Da bekanntlich zwischen der absoluten Helligkeit (Leuchtkraft) eines Sternes und seiner Masse eine von A.S. EDDINGTON theoretisch abgeleitete und an einem ausgiebigen Materiale geprüfte Beziehung — die sog. *Massenhelligkeits-Relation* — besteht, nach der die Leuchtkraft eines Sterns um so größer ist, je größer seine Masse, bedeutet das in Tabelle I enthaltene Ergebnis, daß die Sterne größter Masse die kleinsten Geschwindigkeiten in bezug auf den Schwerpunkt der die Sonne umgebenden Sterngruppe besitzen, eine Tatsache, auf die wir schon bei der Behandlung der Frage nach der Relaxationszeit eines Sternsystems (S. 32) hinzuweisen Gelegenheit hatten.

Es wird nun unsere Aufgabe sein müssen, die unter der Überschrift A. «Räumliche Verteilung» aufgezählten Eigentümlichkeiten 1–4 unseres Galaktischen Systems, sowie die unter der Überschrift B. «Bewegungen» zusammengefaßten charakteristischen Eigenschaften 1–7 seines Bewegungszustandes, soweit möglich, auf Grund unserer im 2. Kapitel entwickelten theoretischen Betrachtungen über die Dynamik eines Sternsystems, zu einer Einheit zusammenzufassen und dynamisch verständlich zu machen. Es wird sich zeigen, daß sich auf diesem Wege tatsächlich in das auf den ersten Blick etwas krause Gewirr von Beobachtungsergebnissen A: 1—4, B: 1—7, eine ziemlich weitgehende Ordnung bringen läßt, wenn auch von einer allen Tatsachen gerecht werdenden Theorie des Galaktischen Systems zunächst leider, wegen unserer sehr beschränkten Kenntnis der Massenverteilungen und der Bewegungen in größeren Entfernungen von unserem Standorte, noch nicht die Rede sein kann. Die mathematisch einfachste Konzeption, die auch historisch den ersten großangelegten Versuch einer mechanischen Deutung der Vorgänge in unserem Sternsystem darstellt, ist die Annahme, daß dieses ein in einem stationären Zustande befindliches achsensymmetrisches Sternsystem ist, und daß sich unsere Beobachtungen auf die Umgebung eines zwar nahezu in seiner Symmetrieebene, aber in großer Entfernung von der Symmetrieachse befindlichen Sternes beziehen, der allerdings auch gegen die Sterne seiner Umgebung nicht völlig unbeweglich ist, im wesentlichen aber die systematische Bewegung der ihn umgebenden Sterne in bezug auf den Schwerpunkt des Gesamtsystems mitmacht. Da ein achsensymmetrisches System in einem stationären Zustande, wie wir auf S. 64 (Gleichung (107)) gesehen haben, um seine Symmetrieachse rotiert, wird die sich auf diese Annahme stützende Theorie als «*Galaktische Rotationstheorie*» bezeichnet. Wir werden uns in erster Linie mit dieser Theorie zu beschäftigen und zuzusehen haben, inwiefern sie imstande ist, die unter A. und B. angeführten

empirischen Tatsachen zu deuten, worauf wir auch die Frage zu erwägen haben werden, ob diese allerdings viele Hinweise auf eine systematische Rotationsbewegung enthaltenden Tatsachen nicht auch noch anderer Deutungen fähig sind.

Die Theorie der Galaktischen Rotation

Die drei Grundannahmen, auf denen sich diese Theorie aufbaut, sind, wie bereits oben erwähnt: 1. Das Galaktische System besitzt Achsensymmetrie um eine zur Milchstraßenebene senkrechte, diese in einem von der Sonne in einem Abstande von 10 000 bis 20 000 Parsec liegenden Punkte schneidende Achse. 2. Die Milchstraßenebene ist eine Symmetrieebene des Systems. 3. Das System befindet sich in einem stationären Zustande. Durch diese Annahme wird den Tatsachen A. 1 und 2 Rechnung getragen (wenigstens solange, als uns über die räumliche Struktur des Galaktischen Systems nichts Näheres bekannt ist) und die unter A. 3 angegebene räumliche Sterndichte berechtigt uns zur Anwendung der im I. Teil gegebenen, die Sternbegegnungen vernachlässigenden dynamischen Theorie. Die eventuell bestehende «Lokale Sternwolke» würde als unwesentliche «Unebenheit» der räumlichen Verteilung zunächst zu vernachlässigen sein. Die unter A. 4 erwähnte verschiedene Verteilung der Sterne verschiedener Typen und Massen erfordert zu ihrer Erklärung besondere Annahmen, auf die wir noch zurückkommen werden.

Wir wenden uns der Betrachtung der Bewegungen zu. Die unter B. 1 angeführte Apexbewegung der Sonne ist vom Standpunkte einer statistischen Theorie natürlich eine belanglose Zufälligkeit, und wir können uns im weiteren alle Bewegungen für diese Sonnenbewegung korrigiert denken; diese Bewegungen sind dann auf die Bewegung des «Lokalen Zentroids» an der Stelle des Systems bezogen, an der sich unsere Sonne momentan befindet. Nach der Galaktischen Rotationstheorie kann die Bewegung dieses Zentroids nur in einer Rotationsgeschwindigkeit um die Symmetrieachse bestehen, d.h. in einer parallel zur Milchstraßenebene und senkrecht zu dem die Sonne mit dem Mittelpunkte des Galaktischen Systems verbindenden Radiusvektor stehenden Geschwindigkeit, die wir mit Θ_0 bezeichnen wollen, um in Übereinstimmung mit unseren Bezeichnungen in Formeln (106), (107) zu bleiben. Diese Rotationsgeschwindigkeit ist aber nicht in allen Punkten des Raumes dieselbe, sondern eine Funktion der Entfernung ϖ vom galaktischen Mittelpunkte, so daß die «Lokalen Zentroide» der Sterne unserer weiteren Umgebung gegeneinander nicht ruhen, sondern gewisse Bewegungen ausführen. Es ist nun der erste große Erfolg der Galaktischen Rotationstheorie gewesen, daß sie auf Grund dieser Vorstellungen in der Lage war, eine be-

friedigende Erklärung der unter B. 3 erwähnten, sowohl in den mittleren Radialgeschwindigkeiten als in den mittleren Eigenbewegungen in galaktischer Länge beobachteten Doppelwellen zu geben. Diese von J. H. OORT im Bulletin der Astronomischen Institute der Niederlande (B. A. N. 3, Nr. 120 und 4, Nr. 132, 133, 1927) gegebene Erklärung besteht in folgenden Überlegungen:

Es sei in Abb. 7 C das galaktische Zentrum, S die gegen ihre unmittelbare Umgebung ruhend gedachte Sonne und S' ein in bezug auf das Lokale Zentroid seiner Umgebung ruhender Stern; die Entfernung CS, also den Radiusvektor von S, bezeichnen wir mit ϖ, den Radiusvektor CS' von S' — mit ϖ' und den Abstand zwischen S und S' mit r. Wir nehmen an, daß dieser Abstand im Vergleiche zu ϖ und ϖ' *klein* ist, d. h. daß es sich um die in der

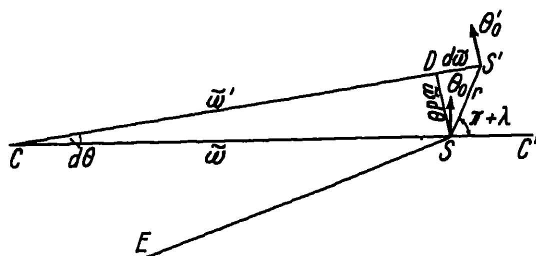


Abb. 7
Differentielle galaktische Rotation.

weiteren Umgebung von S liegenden Sterne handeln soll. Ferner beschränken wir unsere Betrachtungen auf die galaktische Ebene, nehmen also noch an, daß alle drei Punkte C, S, S' in der galaktischen Ebene liegen. Den kleinen Winkel, den die Radienvektoren ϖ und ϖ' bei C bilden, bezeichnen wir mit $d\Theta$. Schließlich fällen wir noch das Lot SD von S aus auf den Radiusvektor CS'. Wir wollen nun die relative Radialgeschwindigkeit und die relative Eigenbewegung von S' in bezug auf S berechnen, und zwar unter Vernachlässigung aller Größen zweiter Ordnung in bezug auf $\frac{r}{\varpi}$.

Wenn die von S aus gezogene Richtung SE die Nullrichtung bezeichnet, von der aus die galaktischen Längen gezählt werden, ist der (überstumpfe) Winkel $ESC = \Lambda_0$, die galaktische Länge des Systemmittelpunktes von der Sonne aus gesehen, und ebenso $ESS' = \Lambda$, die galaktische Länge des betrachteten Sternes S'. Bezeichnen wir die Differenz dieser beiden Längen mit λ, setzen also

$$\lambda = \Lambda - \Lambda_0 \,, \tag{24}$$

dann ist der zwischen r und der Verlängerung von ϖ bei S gebildete Winkel $S'SC'$ gleich $\lambda+\pi$, denn es ist

$$S'SC' = S'SE - C'SE = \Lambda - (\Lambda_0 - \pi) = \Lambda - \Lambda_0 + \pi = \lambda + \pi\,.$$

Nun ist die Rotationsgeschwindigkeit in S gleich Θ_0; sie soll positiv, d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn, gerichtet sein, und steht senkrecht auf dem Radiusvektor ϖ. Dasselbe soll von der Rotationsgeschwindigkeit Θ_0' in S' gelten, die natürlich nicht gleich Θ_0 zu sein braucht, aber da sie eine Funktion allein von ϖ sein soll, in der Form

$$\Theta_0' = \Theta_0(\varpi') = \Theta_0(\varpi) + \frac{\partial\Theta_0}{\partial\varpi}\cdot d\varpi \tag{25}$$

dargestellt werden kann. Die zylindrischen Koordinaten der Punkte S und S' sind bzw.

$$\varpi,\Theta \qquad \text{und} \qquad \varpi' = \varpi + d\varpi\,, \quad \Theta' = \Theta + d\Theta\,. \tag{26}$$

Nun ist nach einem bekannten Satze

$$\varpi'^2 = (\varpi + d\varpi)^2 = \varpi^2 + r^2 + 2\varpi r\cos(\lambda+\pi)$$

und daher, unter Vernachlässigung der Glieder mit $\left(\frac{r}{\varpi}\right)^2$

$$d\varpi = -r\cos\lambda\,. \tag{27}$$

Mit demselben Grade der Genauigkeit ist auch

$$\varpi\, d\Theta = -r\sin\lambda\,. \tag{28}$$

Bezeichnen wir nun mit $\bar{v}_R$ die von der Sonnenbewegung befreite mittlere relative Radialgeschwindigkeit der bei S' liegenden Sterne in bezug auf den momentanen Standort der Sonne, was ja gerade der relativen Radialgeschwindigkeit des «Lokalen Zentroids» bei S' in bezug auf das «Lokale Zentroid» bei S entspricht, und mit $\bar{v}_{T\lambda}$ die entsprechend definierte «Transversalgeschwindigkeit in der galaktischen Ebene» von S' in bezug auf S, so sind diese beiden Geschwindigkeiten offenbar durch die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\bar{v}_R &= \left(\Theta_0 + \frac{\partial\Theta_0}{\partial\varpi}\,d\varpi\right)\cdot\sin(\lambda+\pi-d\Theta) - \Theta_0\sin(\lambda+\pi)\\ \bar{v}_{T\lambda} &= \left(\Theta_0 + \frac{\partial\Theta_0}{\partial\varpi}\,d\varpi\right)\cos(\lambda+\pi-d\Theta) - \Theta_0\cos(\lambda+\pi)\end{aligned} \tag{29}$$

gegeben. Indem wir hierin $d\varpi$ und $d\Theta$ aus (27) und (28) einsetzen und $\sin\left(\lambda+\pi+\frac{r}{\varpi}\sin\lambda\right)$ und $\cos\left(\lambda+\pi+\frac{r}{\varpi}\sin\lambda\right)$ bis auf Größen von der Ord-

nung $\left(\frac{r}{\varpi}\right)$ entwickeln, erhalten wir nach einer einfachen Zwischenrechnung die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \bar{v}_R &= Ar \sin 2\lambda = Ar \sin 2(\Lambda - \Lambda_0) \\ \bar{v}_{T\lambda} &= Ar \cos 2\lambda + Br = Ar \cos 2(\Lambda - \Lambda_0) + Br \ , \end{aligned} \tag{30}$$

die tatsächlich mit dem durch die Formeln (14) und (15) wiedergegebenen empirischen Befunde genau übereinstimmen, und in denen die beiden Konstanten A und B, welche die *Oortschen Konstanten der «differentiellen Galaktischen Rotation»* oder einfach die *Oortschen Rotationskonstanten* genannt werden, durch die Ausdrücke

$$A = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial \Theta_0}{\partial \varpi} - \frac{\Theta_0}{\varpi}\right]; \quad B = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial \Theta_0}{\partial \varpi} + \frac{\Theta_0}{\varpi}\right] \tag{31}$$

gegeben sind. Eine Erweiterung der Formeln (30) für Sterne, die nicht in der galaktischen Ebene liegen, werden wir später noch kennen lernen[12]).

Zwischen den Konstanten A und B besteht eine einfache Beziehung: führen wir an dieser Stelle, anstatt der *linearen* Rotationsgeschwindigkeit Θ_0, die *Winkelgeschwindigkeit* ω ein, die in jedem Punkte des Systems natürlich durch die Beziehung

$$\omega = \frac{\Theta_0}{\varpi} \tag{32}$$

definiert ist, dann erhalten wir aus (31) sofort die Beziehung

$$B - A = \omega \ , \tag{33}$$

der aus dem Grunde eine große Bedeutung zukommt, weil wir aus ihr ohne jede Kenntnis der Entfernung des galaktischen Mittelpunktes, die, wie unter A. 2 hervorgehoben, noch sehr unsicher bestimmt ist, ausschließlich auf Grund der Radialgeschwindigkeiten und Eigenbewegungen der Sterne der Sonnenumgebung, auch die *Periode* der Umdrehung des Milchstraßensystems um seine Achse bestimmen können. Nehmen wir die unter B. 3 angeführten, experimentell bestimmten Werte von A und B an, so erhalten wir nach (33)

$$\omega = B - A = -\,0{,}0277 \text{ km/sec Parsec} \ . \tag{34}$$

Wir schließen hieraus erstens, daß die galaktische Rotation in *negativem*

---

[12]) Die sich bei Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung in (r/ϖ) ergebenden Ausdrücke, die für Objekte in Entfernungen von über 1000 Parsec praktisch in Frage kommen, sind von Miss P. HAYFORD (Lick Obs. Bull. *16*, 53, 1932) und K. BOTTLINGER (Veröff. Berlin-Babelsberg, *10*. (2), 4, 1933) abgeleitet worden.

Sinne erfolgt, da wir ja bei der Ableitung unserer Formeln alle Winkel im positiven Sinne (entgegen dem Uhrzeiger) gezählt haben[13]); das Galaktische System dreht sich also, von seinem Nordpol aus betrachtet, *im Sinne des Uhrzeigers*. Zweitens aber berechnen wir die Periode dieser Rotation folgendermaßen: die Winkelgeschwindigkeit pro Jahr (Eigenbewegung), die einer bestimmten Geschwindigkeit in km/sec in einer Entfernung von 1 Parsec entspricht, wird durch Division dieser Geschwindigkeit durch den Umrechnungsfaktor $k = 4{,}74$ (s. Fußnote auf S. 91) erhalten. Die Winkelgeschwindigkeit der galaktischen Rotation ist mithin

$$\omega'' = 0''.0058 \text{ pro Jahr} \tag{34'}$$

und die Periode P daher

$$P = \frac{360^0}{\omega''} = \text{etwa } 2.10^8 \text{ Jahren}. \tag{35}$$

Wir haben uns bis jetzt mit rein kinematischen Betrachtungen begnügt, um den in den Ausdrücken (14) und (15) niedergelegten empirischen Befund zu erklären; die Grundannahmen der Rotationstheorie der Milchstraße sind aber dynamischer Natur, und es müssen sich daher aus den uns zur Verfügung stehenden numerischen Werten auch irgendwelche Aussagen über die im System wirkenden Kräfte und die das Potential bestimmenden Massen gewinnen lassen.

Die Voraussetzung, daß sich das System in einem stationären Zustande befindet, verlangt, daß die auf die Masseneinheit wirkende Zentralkraft K der durch die Rotationsgeschwindigkeit Θ_0 bedingten Zentrifugalkraft das Gleichgewicht hält. Die Kraft K in jedem Abstande von der Rotationsachse ist daher durch die Beziehung

$$K = \frac{\Theta_0^2}{\varpi} \tag{36}$$

gegeben; durch Einsetzen der sich hieraus ergebenden Ausdrücke für $\frac{\partial \Theta_0}{\partial \varpi}$ und $\frac{\Theta_0}{\omega}$ in die Formeln (31) unter Beachtung von (32) erhalten wir leicht für A und B die neuen Darstellungen

---

[13]) Bei der von Oort in der oben zitierten Arbeit gegebenen Ableitung der Rotationsformeln war an Stelle von Θ_0 die im Drehsinne der Milchstraße positiv gezählte Rotationsgeschwindigkeit V benutzt worden: es ist demnach in den Oortschen Originalformeln $V = -\Theta_0$, und die Ausdrücke für die Konstanten A, B und die Winkelgeschwindigkeit ω' sind daher:

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{V}{\varpi} - \frac{\partial V}{\partial \varpi}\right]; \quad B = -\frac{1}{2}\left[\frac{V}{\varpi} + \frac{\partial V}{\partial \varpi}\right]; \tag{31'}$$

$$\omega' = -\omega = A - B. \tag{33'}$$

$$A = -\frac{\Theta_0}{4\varpi}\left[1 - \frac{\varpi}{K}\cdot\frac{\partial K}{\partial \varpi}\right] = -\tfrac{1}{4}\omega\left[1 - \frac{\varpi}{K}\cdot\frac{\partial K}{\partial \varpi}\right],$$
$$B = +\frac{\Theta_0}{4\varpi}\left[3 + \frac{\varpi}{K}\cdot\frac{\partial K}{\partial \varpi}\right] = +\tfrac{1}{4}\omega\left[3 + \frac{\varpi}{K}\cdot\frac{\partial K}{\partial \varpi}\right]. \qquad (37)$$

Über die funktionelle Abhängigkeit der Kraft $K(\varpi)$ von ϖ können wir zunächst nichts Bestimmtes auszusagen, weil uns die wirkliche Verteilung der gravitierenden Massen im Galaktischen System heute noch nicht bekannt ist, und wir müssen daher an dieser Stelle zu irgendwelchen hypothetischen Annahmen greifen. Wir wollen, dem Beispiel J. H. Oorts folgend, die recht plausible Annahme machen, daß sich das tatsächliche Kraftgesetz durch die Superposition einer invers-quadratischen und einer mit dem Abstande linear zunehmenden Kraft approximieren läßt. Wir setzen also die Kraft $K(\varpi)$ in der Form an:

$$K = K_1 + K_2, \qquad (38)$$

wo

$$K_1 = C/\varpi^2 \quad \text{und} \quad K_2 = D\varpi. \qquad (39)$$

Die Kraft K_1 soll also von einer im Mittelpunkte des Galaktischen Systems befindlichen starken Massenverdichtung herrühren, während die Kraft K_2 einer bis an unsere Sonne und evtl. noch darüber hinaus reichenden gleichmäßigen Massenverteilung (die man sich sowohl sphärisch als auch ellipsoidisch denken kann, da sich unsere Betrachtungen ausschließlich auf die Verhältnisse in der Symmetrieebene beziehen) ihren Ursprung verdankt. Wir können hier drei Fälle unterscheiden:

1. Wenn nur die mit dem Abstande linear zunehmende Kraft K_2 vorhanden ist, muß $C = 0$ sein, und das Einsetzen des Ausdruckes (39) für K_2 in die Formeln (37) ergibt, unter Beachtung von (32)

$$A = O; \quad B = \omega = \frac{\Theta_0}{\varpi} = \frac{\sqrt{K_2\varpi}}{\varpi} = \sqrt{D}\,. \qquad (40)$$

In diesem Falle ist also die ***Winkelgeschwindigkeit*** ω der Rotation ***konstant*** in allen Abständen von der Rotationsachse und das System rotiert wie ein starrer Körper. Es läßt sich übrigens unmittelbar aus Formel (31) für die Konstante A erkennen, daß wenn die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\Theta_0}{\varpi}$ konstant ist, dies immer das Verschwinden von A zur Folge hat; aus diesem Grunde ist diese Konstante von uns oben als Konstante der «differentiellen» Rotation bezeichnet worden, denn bei $A = 0$ rotiert das System immer wie ein starrer Körper, und die durch die Doppelwelle gekennzeichneten differentiellen Verschiebungen seiner einzelnen Teile verschwinden.

2. Wenn die Kraft K nur aus dem invers-quadratischen Teile K_1 besteht,

dann ist $D = 0$, und es ergibt sich durch Einsetzen des Ausdruckes (39) für K_1 in die Formeln (37)

$$A = -\frac{3}{4}\frac{\Theta_0}{\varpi} = -\frac{3}{4}\omega\,; \quad B = +\frac{1}{4}\frac{\Theta_0}{\varpi} = \frac{1}{4}\omega\,. \tag{41}$$

Nun wissen wir, daß im Galaktischen System die Konstante A im allgemeinen nicht verschwindet, aber auch nicht numerisch dreimal größer als die Konstante B ist. Wir können daher versuchen, das Verhältnis der Anteile K_1 und K_2 aus den empirisch bestimmten Werten von A und B abzuleiten.

3. Wenn die Kraft das allgemeine Gesetz (38), (39) befolgt, so bilden wir

$$\frac{\partial K}{\partial \varpi} = -\frac{2C}{\varpi^3} + D = -\frac{1}{\varpi}(2K_1 - K_2)$$

und durch Einsetzen in (37)

$$A = -\frac{3}{4}\cdot\frac{\Theta_0}{\varpi}\cdot\frac{K_1}{K}\,; \quad B = A + \frac{\Theta_0}{\varpi} = +\frac{1}{4}\frac{K_1 + 4K_2}{K}\,. \tag{42}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich sofort

$$\frac{K_1}{K} = \frac{4}{3}\frac{A}{B-A}\,, \tag{43}$$

woraus sich der Anteil der Kraft K_1 an der Gesamtkraft ausrechnen läßt, sobald die Werte der Oortschen Konstanten bekannt sind. Mit den unter B. 3 gegebenen Werten dieser Konstanten erhalten wir

$$K_1/K = 0{,}75\,, \tag{44}$$

so daß nach diesem Ergebnisse etwa $^3/_4$ der Kraft von der in der Zentralverdichtung zusammengeballten Masse herrühren würde. Dieser Umstand ermöglicht nun sofort eine rohe Abschätzung der Masse des Galaktischen Systems, oder wenigstens des in seinem Mittelpunkte konzentrierten Teils M_1. Zu dieser Berechnung brauchen wir natürlich die Entfernung der Sonne vom galaktischen Zentrum, die ja leidlich gut bekannt ist, und den absoluten Betrag der Rotationsgeschwindigkeit Θ_0 an der Stelle der Sonne in km/sec. Da die unter B. 6 mitgeteilte, von G. Strömberg u. a. bestimmte Sonnenbewegung in bezug auf das System der Kugelhaufen genähert senkrecht auf dem vom Shapleyschen Mittelpunkt nach der Sonne gezogenen Radiusvektor steht und einer Drehung im Uhrzeigersinne entspricht, liegt es vom Standpunkte der Galaktischen Rotationstheorie nahe, diese Geschwindigkeit wenigstens größenordnungsmäßig mit der Rotationsgeschwindigkeit des Systems an der Stelle der Sonne zu identifizieren. Wir wollen also probeweise

$$\varpi = 10\,000 \text{ Parsec}; \quad \Theta_0 = 275 \text{ km/sec} \tag{45}$$

setzen, und zwar wählen wir ersteren Wert aus dem Grunde, weil gerade er

nach den Formeln (32), (33) mit dem hier gewählten Werte von Θ_0 und den empirisch bestimmten Werten von A und B durch die Beziehung

$$\varpi = \frac{\Theta_0}{B - A} \tag{46}$$

zusammenhängt. Mit den numerischen Werten (45) ergibt sich nun aus den Beziehungen

$$0.75\,K = 0.75\,\frac{\Theta_0^2}{\varpi} = \frac{\varkappa^2 M_1}{\varpi^2}\,; \quad M_1 = 0.75\,\frac{\Theta_0^2\,\varpi}{\varkappa^2}\,, \tag{47}$$

wo $\varkappa^2 = 6.66.10^{-8}$ c. g. s. die Gravitationskonstante bedeutet, der Wert

$$M_1 = 2{,}6.10^{44}\,g = 1{,}3.10^{11}\odot\,. \tag{47}$$

Eine von PLASKETT und PEARCE (M. N. *94*, 708, 1934) ausgeführte etwas genauere Rechnung, bei der die Masse M_1 im Mittelpunkte des Systems konzentriert, die Masse M_2 als homogenes Ellipsoid verteilt gedacht wurde, ergab die Werte

$$M_1 = 2{,}63.10^{44} g\,; \quad M_2 = 6.7{,}10^{43} g\,; \quad M_1 + M_2 = 3{,}30.10^{44} g = 1{,}65.10^{11}\odot\,. \tag{48}$$

Wir wollen auf diese Berechnungen nicht näher eingehen, da die ihnen zugrunde liegenden numerischen Daten (45) noch zu ungenau sind, um mehr als eine ganz grobe Abschätzung zu rechtfertigen.

Bevor wir die Erscheinung der Doppelwelle und ihre Erklärung in der Theorie der Galaktischen Rotation verlassen, bemerken wir noch, daß diese Erklärung eine weitere Stütze in dem Verhalten der aus den sog. «ruhenden Calciumlinien» bestimmten Radialgeschwindigkeiten der Sterne der Spektralklassen O bis $B\,5$, in denen diese Linien zu beobachten sind, erhalten hat. Der empirisch bestimmte Wert der Amplitude $A\bar{r}$ der Doppelwelle, der unter Benutzung der gewöhnlichen Spektrallinien dieser Sterne erhalten wird, erweist sich ziemlich genau gleich dem doppelten Werte der aus den Kalziumlinien abgeleiteten Doppelwellenamplitude. Die mittlere Entfernung der kosmischen Kalziumwolke, der diese Linien ihre Entstehung verdanken und die augenscheinlich die systematische Bewegung des Sternsystems mitmacht, ist also nur halb so groß, wie die mittlere Entfernung der benutzten O- und B-Sterne, was ja auch zu erwarten wäre, falls die die «interstellare Gaswolke» bildenden Gasmassen, wie es EDDINGTON vermutet, mehr oder weniger gleichmäßig im ganzen Raume verteilt sind. Wir wollen diese rein astrophysikalischen Fragen hier nicht weiter verfolgen. (Eine ausführliche Darstellung der auf diesem Gebiete maßgeblichen Arbeit von J. S. PLASKETT und J. A. PEARCE [M. N. *90*, 243, 1930] sowie weitere Literaturnachweise

findet der Leser im Lehrbuch der Stellarstatistik von E. v. d. PAHLEN, S. 860 ff. Vergl. auch W. M. SMART, Stellar Dynamics, S. 385 — 387).

Wir haben bis jetzt die unter B. 1, 3, 6 angeführten Bewegungserscheinungen im Galaktischen System durchgenommen und gesehen, daß sie sich vom Standpunkte der Theorie der Galaktischen Rotation durchaus verstehen lassen und sich sogar zwanglos in den von dieser Theorie vorgezeichneten Rahmen einfügen. Nun gehen wir zum Punkt B. 2 über, den wir bis jetzt im Zusammenhange mit dieser Theorie noch nicht erwähnt haben, der aber eine besondere Beachtung verdient, weil er sich auf das vielleicht auffälligste Bewegungsphänomen in unserer Umgebung bezieht, nämlich das Phänomen der *Sternströmung*. Die Frage, ob die Galaktische Rotationstheorie dieses Strömungsphänomen zu erklären vermag, läßt sich am einfachsten dadurch beantworten, daß wir zusehen, ob das empirisch erhaltene SCHWARZSCHILDsche Geschwindigkeitsellipsoid (s. B. 2, Formel (7)) oder das verallgemeinerte CHARLIERsche dreiachsige Ellipsoid in seinen charakteristischen Eigenschaften mit dem aus theoretischen Gründen bei einem achsensymmetrischen, in einem stationären Zustande befindlichen Sternsystem zu erwartenden Geschwindigkeitsellipsoid (107) von Kapitel 2 in Übereinstimmung gebracht werden kann. Bei der Behandlung dieser und ähnlicher Fragen haben die beiden Begründer der Rotationstheorie, J. H. OORT und B. LINDBLAD verschiedene Untersuchungsverfahren eingeschlagen, die aber beide letzten Endes auf dieselben Ergebnisse hinausführen.

J. H. OORT ging für die Verteilungsfunktion F im Galaktischen System von einem allgemeinen Ansatze von der Form

$$F = F_0\, e^{-a\Pi^2 - b(\Theta-\Theta_0)^2 - cZ^2 - f(\Theta-\Theta_0)Z - g\Pi Z - h\Pi(\Theta-\Theta_0)} \qquad (49)$$

aus, in dem F_0, a, b, c, f, g, h irgendwelche Funktionen der zylindrischen Koordinaten ϖ, z, jedoch nicht der Koordinate ϑ sind, wodurch der achsensymmetrischen Gestalt des Systems Rechnung getragen wird. Da sich das System in Rotation um die Symmetrieachse (die hier natürlich die Z-Achse ist) befinden soll, sind die nach einem ellipsoidischen Häufigkeitsgesetze zu verteilenden «Restgeschwindigkeiten» hier durch die Komponenten Π, $\Theta - \Theta_0$, und Z gegeben, wo Θ_0 die Rotationsgeschwindigkeit des Systems an der Stelle ϖ, z bezeichnet, und selbst eine Funktion dieser beiden Koordinaten sein kann. Die Größen sowie auch die Richtungen der Achsen des Geschwindigkeitsellipsoids, die durch die Koeffizienten a bis h gegeben werden, sind zunächst unbestimmt gelassen worden und sollen auf Grund der für sie abzuleitenden theoretischen Bedingungen berechnet werden. Schließlich ist die Wahl einer *Exponentialfunktion* für die theoretisch zunächst willkürliche Funktion in der Lösung der Grundgleichung der Stellardynamik zur Erzie-

lung einer möglichst nahen Übereinstimmung mit dem Ergebnisse der Erfahrung getroffen worden. Diese Funktion (49) setzt nun Oort in die auf zylindrische Koordinaten umgerechnete und dem achsensymmetrischen Falle angepaßte Grundgleichung (127) des 2. Kapitels ein, wodurch deren linke Seite die Form eines Polynoms in den verschiedenen Potenzen und Produkten von Potenzen der Geschwindigkeitskomponenten Π, Θ, Z erhält, dessen Koeffizienten gewisse Ausdrücke in den Koordinaten ϖ, z, den Funktionen $a-h$ und deren Derivierten nach den Koordinaten sind. Da dieses Polynom für alle beliebigen Wertekombinationen der Größen Π, Θ, Z verschwinden muß, müssen alle obenerwähnten Koeffizienten einzeln gleich Null sein, woraus sich ein System von zwölf partiellen Differentialgleichungen ergibt, von denen zehn die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids $a-h$ bestimmen, während die beiden letzten Beziehungen zwischen den Koeffizienten a, c, g, der die räumliche Sterndichte ausdrückenden Funktion F_0 und den Kraftkomponenten

$$K_\varpi = \frac{\partial V}{\partial \varpi} \quad \text{und} \quad K_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

herstellen. Die Auflösung der ersten zehn Gleichungen ergab, daß die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids im Ansatze (49) nicht alle von Null verschieden sind, sondern vielmehr, daß

$$f = g = h = 0$$

sein muß, während für a und c die Beziehung gilt

$$a = c = \text{const.}$$

Die Verteilungsfunktion (49) nimmt daher die vereinfachte Form an

$$F = F_0 e^{-a(\Pi^2 + Z^2) - b(\Theta - \Theta_0)^2}, \tag{50}$$

aus der wir folgendes schließen können: das Geschwindigkeitsellipsoid ist an jeder Stelle des Sternsystems so orientiert, daß seine Hauptachsen in die Koordinatenrichtungen ϖ, ϑ, z an der betreffenden Stelle fallen; die in die Richtungen von ϖ und z fallenden Ellipsoidenachsen sind überall einander gleich, so daß das Ellipsoid immer ein *Rotationsellipsoid* ist, und zwar mit einer in die ϑ-Richtung fallenden Rotationsachse. In der galaktischen Ebene selbst, in der sich unsere Sonne praktisch befindet und die eine Symmetrieebene unseres Sternsystems ist, müssen daher die drei Achsen des Geschwindigkeitsellipsoids, bzw. längs dem Radiusvektor (also nach dem Mittelpunkte des Systems), senkrecht auf ihm in der Ebene der Milchstraße und senkrecht zu dieser Ebene gerichtet sein, und zwar sind die erste und die

dritte Achse — also die nach dem galaktischen Mittelpunkte weisende und die auf der Milchstraßenebene senkrecht stehende — einander gleich, während die zweite Achse, um die Rotationssymmetrie herrscht, mit der Richtung der Rotationsgeschwindigkeit Θ_0 zusammenfällt. Diese Resultate stimmen natürlich vollkommen mit den bereits im 2. Kapitel auf Grund der allgemeinen Theorie unter Benutzung des etwas spezialisierten Ansatzes (105) für das Argument der Verteilungsfunktion erhaltenen Ergebnissen überein, nur stellt der Ansatz (49) von OORT eine noch weitergehende Spezialisierung dar, indem er an Stelle der in (107) noch unbestimmt gelassenen Funktion F eine Exponentialfunktion des quadratischen Ausdruckes in den Geschwindigkeitskomponenten wählt. Aus diesem Grunde haben wir hier die OORTsche Untersuchung, die seinerzeit bahnbrechend war, nur referierend wiedergegeben. Auch eine sich aus dieser Untersuchung ergebende sehr wichtige Beziehung zwischen den «Streuungen» $\frac{1}{\sqrt{a}}$ $\left(\text{oder } \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$ und $\frac{1}{\sqrt{b}}$ und den OORTschen Rotationskonstanten A und B, leiten wir direkt aus unseren früheren Formeln (106) und (107) des 2. Kapitels ab, wodurch ihre Gültigkeit auch für den allgemeineren Fall einer nicht exponentiellen, sondern beliebigen Funktion F des quadratischen Argumentes Q bewiesen sein wird. Bilden wir mit Hilfe der zweiten Gleichung (106) die Größen $\frac{\Theta_0}{\varpi}$ und $\frac{\partial \Theta_0}{\partial \varpi}$, so erhalten wir

$$\frac{\Theta_0}{\varpi} = -\frac{k_1}{1+k_2\varpi^2}; \quad \frac{\partial \Theta_0}{\partial \varpi} = \frac{k_1 k_2 \varpi^2 - k_1}{(1+k_2\omega^2)^2}.$$

Setzen wir nun diese Ausdrücke in die Ausdrücke (31) dieses Kapitels für A und B ein, so ergibt sich (wegen der ersten Gleichung (106))

$$2A = \frac{2k_1 k_2 \omega^2}{(1+k_2\varpi)^2} = \frac{2k_1 k_2 \varpi^2}{\lambda^4}; \quad 2B = -\frac{2k_1}{(1+k_2\varpi^2)^2} = -\frac{2k_1}{\lambda^4}$$

und hieraus

$$\frac{B}{B-A} = \frac{1}{\lambda^2}, \tag{51}$$

was wir auch im Hinblicke auf (33) in der Form

$$\frac{1}{\lambda^2} = 1 + \frac{A}{\omega} \tag{52}$$

schreiben können, wo die Winkelgeschwindigkeit ω mit ihrem richtigen Vorzeichen, also hier mit *negativem* Vorzeichen, einzusetzen ist. Nun ist λ^2, wie ein Vergleich von (50) mit Formel (107) von Kapitel 2 lehrt, gleich $\frac{b}{a}$, und da a und b proportional den inversen Quadraten der Achsen des Geschwindigkeitsellipsoids sind, die wiederum proportional zu den entsprechenden

Streuungen σ_{Π}, σ_{Θ} sind, erhalten wir aus (52) die sehr bemerkenswerte, an der Erfahrung prüfbare Beziehung

$$\frac{\sigma_{\Theta}}{\sigma_{\Pi}} = \sqrt{1 + \frac{A}{\omega}} = \sqrt{1 - \frac{A}{\omega'}}, \tag{53}$$

in der ω' die im Uhrzeigersinne als positiv genommene Winkelgeschwindigkeit (vgl. (33') in Fußnote 13 auf S. 103) bedeutet. Da die Konstante A im Galaktischen System, wie wir oben gesehen haben, einen positiven Wert hat, ist die unter der Wurzel stehende Größe, wenn sie überhaupt positiv ist, kleiner als 1, und die Streuung ist größer längs der zum Radiusvektor parallelen Ellipsoidenachse (und der ihr gleichen auf der Milchstraßenebene senkrechten Achse) als längs der zur Θ-Richtung parallelen Symmetrieachse des Geschwindigkeitsellipsoids. Letzteres hat demnach die Form eines *abgeplatteten* Rotationsellipsoids um die zum Radiusvektor senkrechte, in der Milchstraßenebene liegende Achse.

Wenn wir nun alle diese theoretischen Ergebnisse über das Geschwindigkeitsellipsoid mit dem unter B. 2 gegebenen empirischen Befunde — dem aus den Eigenbewegungen der Sterne abgeleiteten SCHWARZSCHILDschen Geschwindigkeitsellipsoid (vgl. Formel (7)) — vergleichen, so stoßen wir hier zum erstenmal auf eine augenscheinliche Nichtübereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung. Das empirisch bestimmte Geschwindigkeitsellipsoid ist zwar auch ein Rotationsellipsoid (oder ein sich nur wenig von einem solchen unterscheidendes Gebilde), aber seine Achsen sind ganz anders orientiert, als es nach der Theorie der Fall sein müßte: seine *längste* Achse ist nämlich seine Rotationsachse und sie fällt mit keiner der theoretisch verlangten Hauptrichtungen zusammen, sondern liegt in der Milchstraßenebene in der galaktischen Länge $\Lambda_{\text{vertex}} = 347^{\circ}$, bildet also in dieser Ebene mit dem Radiusvektor nach dem Mittelpunkte des Galaktischen Systems $\Lambda_{G} = 326^{\circ}$, einen Winkel von etwa 20°. Wenn wir auf die Gleichheit der beiden anderen Achsen untereinander auch kein besonderes Gewicht zu legen brauchen, denn das Gebilde kann, wie wir auf S. 89 gesehen haben, auch durch ein dreiachsiges Ellipsoid, und zwar noch etwas besser, approximiert werden, wobei die längste Achse dann immer noch die in die oben angegebene Vertexrichtung fallende bleibt, und wenn wir die eben erwähnte Abweichung dieser Vertexrichtung von der Richtung auf das galaktische Zentrum als durch das unzureichende Beobachtungsmaterial bedingt betrachten, so kann doch in keinem Falle von der theoretisch zu erwartenden Gleichheit der *radial* gerichteten Achse mit der zur Milchstraßenebene *senkrechtstehenden* Achse die Rede sein; bei einer Darstellung des Geschwindigkeitskörpers mit Hilfe eines dreiachsigen Ellipsoids erhält diese Achse sogar den kürzesten

Wert. Wir stehen also hier vor einem unleugbaren Widerspruche und müssen gewisse Abänderungen an unserer Theorie vornehmen, die sich aber unter Umständen auch als ziemlich tiefgehend erweisen können, denn die festgestellten Abweichungen von der theoretischen Erwartung können kaum anders erklärt werden, als durch eine ***Abweichung des Zustandes des Galaktischen Systems von einem stationären Zustande.*** Es wird sich daher hauptsächlich darum handeln, ob zu dieser Erklärung eine stärkere Abweichung vom stationären Zustande vorausgesetzt werden muß, oder ob schon eine geringe Abweichung genügt, um die festgestellten Störungen hervorzurufen, in welch letzterem Falle nur verhältnismäßig unwesentliche «Retouchen» an der Grundvorstellung der Theorie der Galaktischen Rotation anzubringen sein würden. Auf diese Frage werden wir im nächsten Abschnitte noch ausführlich zurückkommen.

Dagegen scheint die Beziehung (53) für die Schnittellipse des Geschwindigkeitsellipsoids mit der galaktischen Ebene ziemlich gut erfüllt zu sein; setzen wir nämlich die Werte (16) von A und (34) von ω in sie ein, so ergibt sich für das Verhältnis der beiden Streuungen, oder, was dasselbe ist, für das Achsenverhältnis der Geschwindigkeitsellipse in der galaktischen Ebene der Wert

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{k}{h} = 0.66 \qquad (54)$$

(s. Formel (50)), der mit dem empirisch bestimmten Werte (12) von $\frac{k}{h}$ in recht befriedigender Weise übereinstimmt.

Wir wenden uns nun der Betrachtung der weiteren, unter B. erwähnten Bewegungserscheinungen, nämlich B. 4, 5 und 7 zu, sowie ihrer Deutung auf Grund der Theorie der Galaktischen Rotation.

Der sog. K-Effekt (Erscheinung B. 4) kann im Rahmen der strengen Rotationstheorie nicht erklärt werden, und wir haben hier, wenigstens bei einigen Sterngruppen, so vor allem den Sternen der Spektralklasse B, eine Tatsache vor uns, die eine Deutung der Bewegungen dieser Sterne als einfache Rotation streng genommen unmöglich macht. Da ein positiver K-Effekt eine Expansion der uns umgebenden Sterngruppe, ein negativer eine Kontraktion dieser Sterngruppe anzeigt, beides aber in einem achsensymmetrischen Sternsystem in einem stationären Zustande nicht vorkommen kann, da das eine systematische Bewegung nicht nur in der ϑ-Richtung, sondern auch in der ϖ-Richtung verlangen würde, bleiben uns hier nur die zwei Wege offen, entweder eine der Grundvoraussetzungen der Rotationstheorie fallen zu lassen, oder die Realität selbst des Effektes zu leugnen. Wenn nun die neueren Ergebnisse der Untersuchungen von PLASKETT und PEARCE über die Radialgeschwindigkeiten der B-Sterne diesen Effekt auf einen so kleinen Betrag herunterzudrücken scheinen (etwa + 2 km/sec), bei dem er zu einem großen

Teile als EINSTEINsche Gravitationsverschiebung der benutzten Spektrallinien aufgefaßt werden könnte, so erscheint doch die Zurückführung des dann noch verbleibenden Restbetrages auf systematische Messungsfehler kaum zulässig und stellt jedenfalls nur eine schwache Begründung für die Behauptung dar, daß es überhaupt keinen K-Effekt kinematischen Ursprunges gebe. Wie wir später sehen werden, tritt ein K-Effekt in einem allgemeinen Strömungsfelde normalerweise immer auf und verschwindet nur unter ganz speziellen Voraussetzungen, die aber gerade mit den Grundpostulaten der reinen Rotationstheorie übereinstimmen. Auch auf diese Frage werden wir im nächsten Abschnitte zurückkommen und begnügen uns hier mit der Feststellung, daß die Ausdrücke (17) und (30) für den Gang von $\bar{v}_R$ mit der galaktischen Länge, nur bei $K = 0$, miteinander vereinbar sind.

Die unter B. 5 besprochene eigentümliche einseitige Verteilung der Bewegungsrichtungen der «Schnelläufer», als welche wir die Sterne betrachten wollen, deren Raumgeschwindigkeit in bezug auf die uns umgebende Sterngruppe (also nach Abzug der normalen Sonnengeschwindigkeit) größer als 65 km/sec sind, läßt sich auf Grund der Galaktischen Rotationstheorie in sehr befriedigender Weise erklären. Nehmen wir an, daß eine Geschwindigkeit von 65 km/sec *in der Richtung der Rotationsgeschwindigkeit* Θ_0 des Galaktischen Systems an der Stelle der Sonne, also eine Geschwindigkeit vom absoluten Betrage

$$|\Theta_0| + 65 \text{ km/sec}$$

in bezug auf den Schwerpunkt des Galaktischen Systems schon der *Entweichgeschwindigkeit* aus diesem System entspricht, so ist klar, daß bei einem stationären Zustande des Systems solche Geschwindigkeiten nicht mehr vorkommen werden. Dagegen würde sogar eine Relativgeschwindigkeit von über 65 km/sec in der der Rotationsgeschwindigkeit entgegengesetzten Richtung, nur einer Geschwindigkeit von weniger als $|\Theta_0| - 65$ km/sec in bezug auf den Schwerpunkt des Gesamtsystems entsprechen und daher durchaus möglich sein; und solche Geschwindigkeiten würden auch in anderen Richtungen noch möglich bleiben, wenn der von ihnen mit der Rotationsrichtung gebildete Winkel genügend groß ist, um die resultierende Geschwindigkeit in bezug auf das Gesamtsystem unter den angegebenen oberen Grenzwert der Entweichgeschwindigkeit herabzudrücken. Die großen Relativgeschwindigkeiten werden also eine Hemisphäre, deren Pol etwa bei $\beta = 0°$, $\lambda = 326° + 90° = 56°$ liegt, meiden und mit nur wenigen Ausnahmen alle nach der entgegengesetzten Seite des Himmels gerichtet sein, und dies entspricht auch im wesentlichen dem empirischen Befunde. Die von OORT gegebene Erklärung der *absoluten* Asymmetrie der Verteilung der Bewegungsrichtungen der Schnelläufer, die in bezug auf das Galaktische System eher als «Langsam-

läufer» zu bezeichnen wären, kann am besten an Hand der Abb. 8 veranschaulicht werden, die der Originalarbeit von Oort (B. A. N. Nr. 159, 1928) entnommen ist. Die Ebene dieser Abbildung fällt mit der galaktischen Ebene zusammen, und die an ihren Rändern stehenden Zahlen bedeuten galaktische Längen. Der in der Abbildung dargestellte Raum ist der Geschwindigkeitsraum, dessen Nullpunkt C (der einer Geschwindigkeit 0 in bezug auf

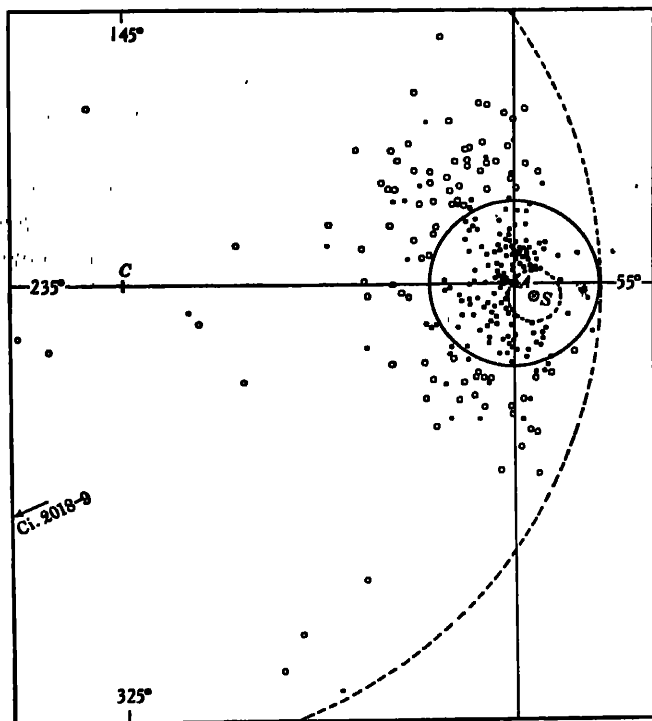


Abb. 8

Erklärung der asymmetrischen Verteilung der Schnelläufergeschwindigkeiten, nach J. H. Oort.

den Schwerpunkt des Galaktischen Systems entspricht) durch ein Kreuz bezeichnet ist. Eine nach dem Mittelpunkte des Galaktischen Systems gerichtete Geschwindigkeit würde in diesem Diagramm durch einen vom Kreuze aus vertikal nach unten (in Richtung der galaktischen Länge $\Lambda_G = 326°$) gezogenen Pfeil, bzw. durch den seine Spitze bezeichnenden Punkt, dargestellt werden. Der Halbmesser des großen durchbrochenen Kreises entspricht der Entweichgeschwindigkeit, die wir hier gleich 365 km/sec annehmen wollen, indem wir die Rotationsgeschwindigkeit des Galaktischen Systems an der Stelle der Sonne, Θ_0, rund gleich 300 km/sec setzen. Der von einem kleinen

Kreise eingeschlossene Punkt stellt die Projektion der Spitze des vom Kreuze aus gezogenen Geschwindigkeitsvektors der Sonne *(in bezug auf den Schwerpunkt des Galaktischen Systems)* auf die galaktische Ebene dar, während das kleine schwarze Viereck *A* der Kreisgeschwindigkeit Θ_0 an der Stelle der Sonne entspricht, die wir mit der Geschwindigkeit Θ_0 des Schwerpunktes der die Sonne umgebenden Sterne, also des «Lokalen Zentroids» an der Stelle der Sonne, identifizieren können. Der diese beiden Punkte verbindende Vektor ist also nach Größe und Richtung gleich der Projektion auf die galaktische Ebene der «normalen», nach dem Apex bei $\Lambda_{Apex} = 22^0$, $B_{Apex} = +20^0$ gerichteten Sonnengeschwindigkeit von nahezu 20 km/sec. Der ausgezogene Kreis, dessen Mittelpunkt das Viereck ist, und der den großen durchbrochenen Kreis bei $\lambda = 56^0$ berührt, hat einen Halbmesser von 65 km/sec und stellt daher die größte Relativgeschwindigkeit dar, bei der ein Stern noch nicht als ein «Schnelläufer» zu betrachten ist. In diesen Kreis fallen somit die allermeisten Geschwindigkeiten der die Umgebung der Sonne bildenden Sterne. (Um den kleinen durchbrochenen Kreis mit dem Mittelpunkt in ⊙ brauchen wir uns hier nicht weiter zu kümmern, da er die Geschwindigkeitspunkte derjenigen Sterne enthält, deren Relativgeschwindigkeiten in bezug auf die Sonne kleiner als 20 km/sec sind; diese Punkte sind in das Diagramm nicht eingetragen worden.) Die kleinen schwarzen Punkte und offenen Kreise, die außerhalb des ausgezogenen Kreises liegen, stellen nun die Geschwindigkeitspunkte aller Schnelläufer dar, deren Raumgeschwindigkeiten einigermaßen zuverlässig ermittelt werden konnten. (Die Gesamtheit der außerhalb und innerhalb des ausgezogenen Kreises liegenden schwarzen Punkte stellt eine statistisch *vollständige* Gruppe sonnennaher Sterne dar, deren Relativgeschwindigkeiten in bezug auf die Sonne größer als 19,5 km/sec sind; auch diese Sterne interessieren uns hier nicht weiter.) Aus diesem Diagramm ist nun sofort zu ersehen, daß auch bei einer gleichmäßigen Verteilung der Bildpunkte der Schnelläufer über das ganze zulässige Gebiet, das durch das Innere des großen durchbrochenen Kreises gegeben wird, ihre von der bewegten Sonne oder dem «Lokalen Zentroid» aus beurteilte Verteilung als eine gänzlich asymmetrische erscheinen müßte; die Anzahl der in der Hemisphäre mit dem Berührungspunkte beider Kreise als Pol ($\beta = 0^0$, $\lambda = 56^0$) enthaltenen Geschwindigkeitspunkte wäre eine viel geringere als für die entgegengesetzte Hemisphäre. Wie die Figur zeigt, scheint in Wirklichkeit die Verteilung der Schnelläuferpunkte keine gleichmäßige zu sein, sondern in Richtung der Rotationsbewegung eine merkliche Abplattung aufzuweisen, die auch als eine Strömungserscheinung in *radialer* Richtung aufgefaßt werden könnte, als deren Folge die rechte Hemisphäre, etwa zwischen den galaktischen Längen 322° und 132° von Schnelläuferpunkten praktisch ganz frei bleibt, während ihre Verteilung in der linken

Hemisphäre die auch auf Abb. 5 erkennbare Welle zeigt, mit zwei Maximis bei $\lambda = 160^\circ$ und $\lambda = 330^\circ$ (ungefähr), und einem sekundären Minimum etwa bei $\lambda = 235^\circ$. Die ganz wenigen Sterne, die nicht innerhalb des durchbrochenen Kreises liegen, darunter der weite Doppelstern *Ci* 2018-9, der am linken Rande der Figur angedeutet ist, bilden wahrscheinlich in Wirklichkeit keine Ausnahmen, da ihre Raumgeschwindigkeiten noch viel zu ungenau bestimmt sind, als daß man mit einiger Sicherheit behaupten könnte, daß diese Geschwindigkeiten über der hier angenommenen Entweichgeschwindigkeit aus dem System, von 365 km/sec, liegen. Zu letzterem Werte ist noch folgendes zu bemerken: wenn wir uns die gesamte Masse des Galaktischen Systems in seinem Mittelpunkte konzentriert denken, was, wie wir gesehen haben, keine allzu schlechte Annäherung an die wirklichen Verhältnisse darzustellen scheint, und die Kreisgeschwindigkeit an der Stelle der Sonne, wie das hier geschehen ist, gleich $\Theta_c = 300$ km/sec ansetzen, dann müßte die Entweichgeschwindigkeit $\Theta_c \sqrt{2} = 423$ km/sec betragen, und die absolute Asymmetrie der Schnelläufer dürfte erst bei einer relativen Geschwindigkeit von $423 - 300 = 123$ km/sec in bezug auf die Sonne in Erscheinung treten (für $\Theta_c = 275$ km/sec bei 115 km/sec). In Wirklichkeit scheint das Verhältnis zwischen Entweichgeschwindigkeit und Kreisgeschwindigkeit ($365/300 = 1{,}22$) nicht unbeträchtlich kleiner als $\sqrt{2}$ zu sein. Diese kleine Unstimmigkeit kann natürlich darauf zurückgeführt werden, daß die gravitierenden Massen in Wirklichkeit nicht alle im Zentrum des Systems liegen, sondern zum Teil auch, etwa in Gestalt eines stark abgeplatteten Ellipsoids, im Raume zerstreut sind. Es muß aber auch daran erinnert werden, daß die für Θ_c und Θ_0 angegebenen numerischen Werte noch beträchtlich verfälscht sein könnten; wählt man für die Kreisgeschwindigkeit Θ_c den Wert 242 km/sec, und für die Rotationsgeschwindigkeit des Lokalen Zentroids $\Theta_0 = 275$ km/sec, dann ergibt sich für die Entweichgeschwindigkeit 340 km/sec, die Θ_0 genau um 65 km/sec übersteigt. Allerdings würde ein solcher Ansatz bedeuten, daß die momentane Bahn des Lokalen Zentroids kein Kreis, sondern eine Ellipse ist, in der Nähe deren «Perihels» es sich gegenwärtig befinden müßte. Wie dem auch sei, hat sich die Galaktische Rotationstheorie als durchaus imstande erwiesen, die wichtigsten Merkmale der Verteilung der Bewegungsrichtungen der Schnelläufer in sehr befriedigender Weise darzustellen und namentlich das gänzliche Fehlen der großen Relativgeschwindigkeiten in dem Winkelraume um die Richtung $\beta = 0^\circ$, $\lambda = \Lambda_a + 90^\circ = 56^\circ$ in zwangloser Weise zu erklären. Es darf aber hierzu bemerkt werden, daß letztere Tatsache in geradezu augenfälliger Weise auf eine schnelle Bewegung der Sonne und der Sterne ihrer Umgebung in bezug auf das gesamte Galaktische System in Richtung des galaktischen Längenquadrantes $\lambda = 0^\circ - 90^\circ$ hin-

weist, und durch jede Theorie, die eine solche Bewegung in irgendeiner Form annimmt, erklärt werden kann.

Was nun den zweiten Teil des Punktes B. 5, die Verschiebung der für verschiedene Sterngruppen gebildeten Geschwindigkeitskörper gegeneinander in der Richtung der galaktischen Länge etwa $\lambda = 250^\circ$ betrifft, und die von G. STRÖMBERG gefundene Relation (19) zwischen der Größe dieser Verschiebung und der Streuung der Restgeschwindigkeiten für jede der betrachteten Sterngruppen, so können auch diese Erscheinungen vom Standpunkte der Galaktischen Rotationstheorie, allerdings nur unter Einführung gewisser zusätzlicher Annahmen über die Struktur des Milchstraßensystems, verständlich gemacht werden. Zu diesem Zwecke gehen wir von der Gleichung (118) des 2. Kapitels (mit den Definitionsgleichungen (115) und (116) für c_1 und Θ_1) aus, in die wir nun an Stelle der willkürlichen Funktion F unserer allgemeinen Theorie, die spezielle Form (50) dieses Kapitels einsetzen. Wie aus (107) (2. Kapitel) unmittelbar zu ersehen, und auch schon oben (S. 64) ausgeführt, ist dann die in (118) auftretende Größe λ gleich dem Achsenverhältnisse $\sqrt{\frac{b}{a}}$ des SCHWARZSCHILDschen Rotationsellipsoids. Wir haben also für die Funktion F die zwei Formen, nämlich (50) und

$$F = P e^{-a(\Pi^2 + Z^2 - 2V_1) - b(\Theta - \Theta_0)^2}, \tag{55}$$

aus deren Vergleich sich die Beziehung

$$F_0 = P e^{2aV_1} \tag{56}$$

ergibt, in der P wie a Konstanten sind. Da nun das Integral in (118) die Form annimmt

$$\nu = \frac{4\pi}{\lambda} F_0 \int_0^\infty e^{-a c_1^2} \cdot c_1^2 \, dc_1$$

und ausgewertet werden kann[12]), erhalten wir für den Ausdruck der Sterndichte

$$\nu = \frac{4\pi F_0}{\lambda} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4(a)^{\frac{3}{2}}} = P\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{2aV_1}. \tag{57}$$

Nehmen wir den natürlichen Logarithmus dieses Ausdruckes und differentiieren ihn nach ϖ, so ist, da in ihm nur V_1 und λ Funktionen von $\bar{\varpi}$ sind,

$$\frac{d \ln \nu}{d\varpi} = 2a \frac{dV_1}{d\bar{\varpi}} - \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{d\bar{\varpi}}. \tag{58}$$

---

[12]) S. Fußnote auf S. 30.

Bilden wir mit Hilfe der ersten und dritten Gleichung (106) (2. Kapitel) die Ausdrücke für die Differentialquotienten von V_1 und λ nach ϖ, so erhalten wir

$$\frac{dV_1}{d\varpi} = \frac{dV}{d\varpi} + \frac{k_1^2 \varpi}{(1+k_2\varpi^2)^2} = \frac{dV}{d\varpi} + \frac{k_1^2 \varpi}{\lambda^4}; \quad \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{d\varpi} = \frac{k_2 \varpi}{\lambda^2}$$

und durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (58) ergibt sich

$$\frac{d\ln\nu}{d\varpi} = 2a\left\{\frac{dV}{d\varpi} + \frac{\varpi}{\lambda^4}k_1^2\right\} - \frac{\varpi}{\lambda^2}\cdot k_2 \,. \tag{59}$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung (106) folgen aber für k_1 und k_2 die Beziehungen

$$\frac{k_1^2}{\lambda^2} = \frac{\Theta_0^2\lambda^2}{\varpi^2}; \quad k_2 = \frac{1}{\varpi^2}(\lambda^2 - 1) \quad ,$$

mit deren Hilfe wir k_1 und k_2 aus (59) eliminieren können, worauf letzteres die Form erhält

$$\frac{d\ln\nu}{d\varpi} = 2a\left\{\frac{dV}{d\varpi} + \frac{\Theta_0^2}{\varpi}\right\} - \frac{1}{\varpi}\left\{1 - \frac{1}{\lambda^2}\right\} \,. \tag{60}$$

Hierin ist λ^2 wie schon mehrfach erwähnt, gleich $\frac{b}{a}$, während $\frac{dV}{d\varpi}$ die an der betrachteten Stelle des Systems auf die Masseneinheit wirkende *radiale Kraft* darstellt. Definieren wir an jeder Stelle des Systems eine Geschwindigkeit Θ_c, bei der (wenn sie senkrecht zum Radiusvektor steht) die Zentrifugalkraft der Gravitationskraft gerade das Gleichgewicht hält, und die wir aus diesem Grunde die Kreisgeschwindigkeit an der betreffenden Stelle nennen, so ist

$$\frac{\Theta_c^2}{\varpi} = -\frac{dV}{d\varpi} \,. \tag{61}$$

Mit diesen Bezeichnungen nimmt unser Ausdruck (60) die Form an

$$\frac{d\ln\nu}{d\varpi} = -\frac{2a}{\varpi}\left\{\Theta_c^2 - \Theta_0^2\right\} - \frac{1}{\varpi}\left\{1 - \frac{a}{b}\right\} \,. \tag{62}$$

Wir bezeichnen nun die Differenz zwischen der Kreisgeschwindigkeit Θ_c und der Rotationsgeschwindigkeit Θ_0 an irgendeiner Stelle der Milchstraße mit S, setzen also

$$S = \Theta_c - \Theta_0 \,. \tag{63}$$

Hieraus ergibt sich

$$\Theta_c^2 - \Theta_0^2 = S^2 + 2S\,\Theta_0 \,,$$

und wenn S eine *kleine* Größe ist, kann hierfür

$$\Theta_c^2 - \Theta_0^2 = 2S\,\Theta_0$$

geschrieben werden, woraus wiederum, wegen (46),

$$\Theta_c^2 - \Theta_0^2 = -2S\varpi(A-B) \tag{64}$$

folgt. Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in (62) und Auflösung nach S erhalten wir schließlich

$$S = \frac{\frac{1}{a}}{4(A-B)}\left[\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{d\varpi} + \frac{1}{\varpi}\left(1 - \frac{a}{b}\right)\right]. \tag{65}$$

Wenn wir in dieser Gleichung die Größen a und b, die den Quadraten der Halbachsen des Geschwindigkeitsellipsoids invers proportional sind, durch die entsprechenden Streuungen

$$a = \frac{1}{2\sigma_\Pi^2}; \quad b = \frac{1}{2\sigma_\Theta^2}$$

ersetzen, nimmt sie nun die von uns benötigte Form an:

$$S = \frac{\sigma_\Pi^2}{2(A-B)}\left[\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{d\varpi} + \frac{1}{\varpi}\left(1 - \frac{\sigma_\Theta^2}{\sigma_\Pi^2}\right)\right], \tag{66}$$

wo $\sigma_\Pi = \sigma_z = \sigma$ die Streuung der Geschwindigkeitskomponenten in der in der Milchstraßenebene liegenden radialen Richtung und in der auf dieser Ebene senkrecht stehenden Richtung bedeutet. Dies ist aber eine Beziehung, welche die Verschiebung des Mittelpunktes des Geschwindigkeitskörpers einer Sterngruppe gegen einen eine reine Rotation um das galaktische Zentrum ausführenden Beobachter, $(\Theta_c - \Theta_0)$, mit der inneren Streuung der Restgeschwindigkeiten σ der Sterne dieser Gruppe verbindet, und zwar ist diese Beziehung, wie auch die Strömbergsche Gleichung (19), linear in $(\Theta_c - \Theta_0)$ und quadratisch in σ. Um nun die von Strömberg entdeckte partielle Asymmetrie der Geschwindigkeitsverteilungen in verschiedenen herausgegriffenen Sterngruppen zu erklären, hat B. Lindblad die Hypothese aufgestellt, daß das Galaktische System kein einheitliches Gebilde ist, sondern aus einer Reihe von Untersystemen besteht, die zwar in der Galaktischen Ebene weitgehend räumlich zusammenfallen, sich aber in bezug auf ihren Bewegungszustand voneinander unterscheiden. Der Hauptunterschied zwischen ihnen liegt in der *verschiedenen Rotationsgeschwindigkeit* Θ_0, mit der sie sich um die Achse der Galaxie drehen, also in der an jeder Stelle des Systems (und daher auch an der von der Sonne gegenwärtig eingenommenen Stelle) für die den verschiedenen Gruppen angehörenden Sterne charakteristischen *Gruppengeschwindigkeit,* die ja gerade ihre Rotationsgeschwindigkeit Θ_0 ist. Die größte Rotationsgeschwindigkeit, und zwar eine Geschwindigkeit, die sich nur ganz wenig von der für jede Stelle geltenden Kreisgeschwindigkeit Θ_c (s. (61)), unterscheidet, sollen die Sterne der Milchstraßenwolken haben, zu denen auch die uns umgebende Sterngruppe und die Sonne selbst gehören, die kleinste – etwa das System der Kugelförmigen Sternhaufen. Da

nach der STRÖMBERGschen Beziehung (19) und nach Gleichung (66) auch die Streuung der Geschwindigkeiten senkrecht zur Milchstraßenebene um so größer wird, je weiter sich die Rotationsgeschwindigkeit von der Kreisgeschwindigkeit entfernt (je stärker die Sterne der betreffenden Gruppe hinter den die Sonnenumgebung bildenden Sternen bei ihrer Rotationsbewegung zurückbleiben), werden die langsamer rotierenden Sterngruppen auch eine sich einer Kugel stärker nähernde Form zeigen, während die am schnellsten rotierenden Gruppen eine sehr abgeplattete Gestalt besitzen werden. Das schematische Bild des Aufbaus des Galaktischen Systems nach der Hypothese von LINDBLAD ist in Abb. 9 dargestellt. Das am stärksten abgeplattete innerste System stellt das ganz flache System der die eigentliche Milchstraße bildenden Sternwolken dar, das nach der hier geschilderten Theorie auch die

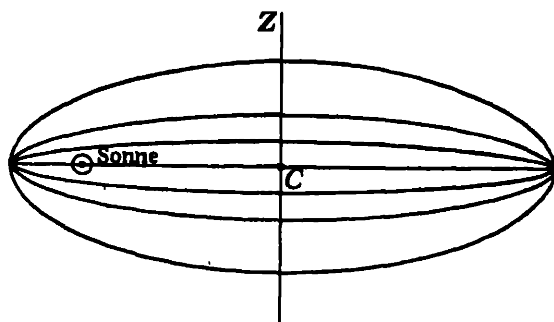


Abb. 9

Aufbau des Galaktischen Systems aus Untersystemen verschiedener Abplattung und Rotationsgeschwindigkeit, nach B. Lindblad.

allerschnellste Rotationsgeschwindigkeit (etwa 300 km/sec an der in der Abbildung durch einen Kreis bezeichneten Stelle der Sonne) und die kleinste innere Streuung der Geschwindigkeiten besitzt; die weiteren, weniger exzentrischen Ellipsen der Abb. 9 stellen dann die Meridianschnitte der anderen unter B. 5 aufgezählten Systeme von Sternen dar, deren gegeneinander in der zur Galaktischen Rotation entgegengesetzten Richtung (also in der galaktischen Länge etwa $\lambda = 236^0$) verschobenen Geschwindigkeitskörper in Abb. 6 dargestellt worden sind. Zu den langsamer rotierenden Systemen wäre bei dieser Auffassung außer des Systems der Kugelhaufen natürlich auch das System der «Schnelläufer» zu rechnen, das in Übereinstimmung mit Gleichung (66) eine sehr beträchtliche innere Streuung der Gewindigkeiten aufweist.

Die Voraussetzung für die Möglichkeit der Identifizierung der Gleichung (66) mit der STRÖMBERGschen Beziehung (19) ist natürlich, daß der in (66)

in der Klammer stehende Ausdruck für alle ineinandergeschachtelten Systeme annähernd denselben Wert hat. Dies wird der Fall sein, wenn das erste Glied des in der Klammer stehenden Ausdruckes das zweite numerisch merklich überwiegt. Eine von OORT (B. A. N. 159, S. 283, 1928) unternommene ausführliche Bearbeitung des von STRÖMBERG zusammengetragenen Beobachtungsmaterials hat zu dem Ergebnisse geführt, daß dies in der Tat der Fall ist. Aus den für eine Reihe von Gruppen empirisch bestimmten Werten von $S = \Theta_c - \Theta_0$, σ_{Π} und σ_{Θ} ergab sich für den logarithmischen Dichtegradienten, wie bei einer Abnahme der räumlichen Sterndichte ν nach außen zu erwarten war, ein negativer Wert, und zwar $\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{d\varpi} = -0.00019$. Soweit scheint also die Übereinstimmung der Theorie mit den empirischen Ergebnissen eine durchaus befriedigende zu sein. Es darf aber nicht übersehen werden, daß, da es sich hier immer nur um stationäre Zustände gehandelt hat, die viel schwierigeren kosmogonischen Probleme zunächst ganz außer acht gelassen worden sind. Auf welche Weise eine so verwickelte, ja direkt «künstlich» anmutende Struktur des Galaktischen Sternsystems wohl entstanden sein könnte, ist eine Frage, auf die die Wissenschaft heute die Antwort noch schuldig bleiben muß. Zwar hat B. LINDBLAD gewisse Betrachtungen kosmogonischen Charakters angestellt, durch die die Entstehung der von ihm vorausgesetzten ineinander eingeschachtelten Systeme mit verschiedener Abplattung und verschiedener Rotationsgeschwindigkeit wenigstens zu einem gewissen Grade plausibel gemacht wird, die aber, wie die meisten kosmogonischen Überlegungen, die wir heute anstellen können, noch auf sehr schwacher empirischer Grundlage stehen, und auf die an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden kann. Auch von der rein experimentellen Seite ist das Ergebnis von G. STRÖMBERG in bezug auf die gegeneinander verschobenen Geschwindigkeitskörper der verschiedenen Sterngruppen nicht unangezweifelt geblieben; J. H. OORT hat schon in seiner bereits im Jahre 1928 erschienenen grundlegenden Arbeit über die «Schnelläufer» (Gron. Publ. Nr. 40) die Vermutung ausgesprochen, daß diese Verschiebung sehr wohl durch die in der von STRÖMBERG benutzten Gruppeneinteilung von Gruppe zu Gruppe ständig zunehmende Beimischung von Sternen der Schnelläufer-Gruppe vorgetäuscht sein könnte, und diese Frage ist bis jetzt noch nicht in eindeutiger Weise entschieden worden. Eine eingehende Untersuchung der weiteren Frage, inwiefern die in unserer Übersicht unter A. 4 und B. 7 angeführten Eigentümlichkeiten der räumlichen Verteilung und der Bewegungsverhältnisse der sonnennahen Sterne verschiedener Spektralklassen mit den LINDBLADschen Untersystemen und ihren Eigentümlichkeiten in Beziehung gebracht werden können, ist bis heute auch noch nicht durchgeführt worden und kann, auf Grund des uns gegenwärtig zur Verfügung stehenden Beobach-

tungsmaterials, wohl auch noch gar nicht in Angriff genommen werden.

Die oben gegebenen Erklärungen der im Galaktischen System festgestellten Bewegungsphänomene auf Grund der Theorie der Galaktischen Rotation, lehnen sich an das von J. H. OORT in seinen Untersuchungen eingeschlagene Verfahren und die etwas allgemeinere Betrachtungsweise W. M. SMARTS (Stellar Dynamics) an. Eine andere Methode hat B. LINDBLAD etwa gleichzeitig entwickelt, die sich auf das JEANS-CHARLIERsche Theorem stützt und mit deren Hilfe er sämtliche obenstehende Ergebnisse und noch gewisse andere, auf die wir im nächsten Abschnitte zurückkommen werden, abgeleitet hat. Sein Verfahren besteht in der Abgrenzung der bei einem stationären Zustande eines Sternsystems zulässigen Gebiete der I_1, I_2-Ebenen, in der jeder Stern durch einen, durch die beiden während seiner ganzen Bewegung unveränderlichen Koordinaten I_1 und I_2 (seine ersten Bewegungsintegrale) definierten Punkt dargestellt wird.

Aus den beiden Ausdrücken dieser Integrale für ein achsensymmetrisches System in zylindrischen Koordinaten (s. Formeln (102) und (103) des 2. Kapitels)

$$I_1 = \Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 - 2V; \quad I_2 = \varpi\Theta$$

ergibt sich leicht, daß diese Gebiete in der I_1, I_2-Ebene durch das von gewissen Parabeln und der I_1-Achse abgegrenzte Ebenenstück gegeben werden, wobei jedem Abstande ϖ vom Mittelpunkte des Systems eine eigene Parabel entspricht. Die Umhüllende aller dieser Parabeln, deren Gleichungen

$$I_2^2 = \varpi^2 (I_1 + 2V)$$

lauten, gibt dann das Gebiet der I_1, I_2-Ebene, das für das Gesamtsystem allein in Frage kommt und alle die einzelnen Sterne darstellenden Wertekombinationen I_1, I_2, die bei einem stationären Zustande vorkommen dürfen, enthalten muß. Nun können in diesem Gebiete «Frequenzlinien» betrachtet werden, d. h. durch irgendwelche Gleichungen

$$F(I_1, I_2) = \text{const.}$$

dargestellte *Kurven gleicher Häufigkeit* der die Sterne darstellenden Punkte. Jede vorgegebene Schar solcher Kurven bestimmt einen Geschwindigkeitskörper, der dadurch erhalten wird, daß man die Ausdrücke der beiden Integrale I_1 und I_2 in die Gleichung der Frequenzkurve einsetzt. Da sich zeigen läßt, daß die Punkte der Umhüllenden einer reinen Rotationsbewegung entsprechen, verlangt die Theorie der Galaktischen Rotation, daß sich die Bildpunkte der Sterne des Galaktischen Systems längs der Umhüllenden häufen müssen, daß also sich die Frequenzkurven ihr eng anschließen. Dieses schematische Verfahren hat vor der Benutzung des speziellen OORTschen An-

satzes (49) den Vorzug größerer Allgemeinheit, da man für die Frequenzlinien auch kompliziertere Beziehungen zwischen I_1 und I_2 wählen kann. Da aber eine lineare Beziehung (also geradlinige Frequenzlinien) zu einem Geschwindigkeitskörper führt, der durch eine beliebige Funktion des Argumentes

$$\Pi^2 + (\Theta - \Theta_0)^2 + Z^2$$

(Rotation mit sphärischer Verteilung der Restgeschwindigkeiten) dargestellt wird, und eine quadratische Beziehung der Form

$$I_1 + \frac{1}{2P}(I_2 - M)^2 = N$$

zu einem Geschwindigkeitskörper, der durch eine beliebige Funktion des Argumentes

$$a(\Pi^2 + Z^2) + b(\Theta - \Theta_0)^2$$

(Rotation mit ellipsoidischer Verteilung der Restgeschwindigkeiten) wiedergegeben werden kann, und LINDBLAD nur diese zwei Typen von Frequenzlinien in Betracht gezogen hat, gehen seine Untersuchungen in diesem Punkte nicht über die oben gegebene Behandlung von Geschwindigkeitskörpern des *verallgemeinerten Schwarzschildchen Typus* (s. S. 63) hinaus. Wir werden von diesem LINDBLADschen Verfahren hier keinen weiteren Gebrauch machen und verweisen den Leser, der diese sehr beachtenswerte Methode in ihren Einzelheiten näher kennen lernen will, auf die hauptsächlich im Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik erschienenen Originalarbeiten B. LINDBLADS, auf die von ihm selbst in den Stockholmer Annalen gegebene zusammenfassende Darstellung und auf das Lehrbuch der Stellarstatistik von E. v. d. PAHLEN, wo auch ausführliche Literaturangaben zu finden sind.

Kritik der Galaktischen Rotationstheorie
Nichtstationäre Zustände
Strömungstheorie

Wie wir oben gesehen haben, vermag die Galaktische Rotationstheorie eine ganze Reihe von Erscheinungen, die die neuere Forschung in den Bewegungsverhältnissen der unsere Umgebung bildenden Milchstraßensterne zu Tage gefördert hat, in sehr befriedigender Weise zu erklären. Die ellipsoidische Verteilung der von der «lokalen» Sonnengeschwindigkeit befreiten «Pekuliargeschwindigkeiten» (oder «Restgeschwindigkeiten») dieser Sterne (Punkt B. 2 unserer Übersicht auf S. 83—98), die Doppelwellen in den mittleren Radialgeschwindigkeiten und Eigenbewegungen (Punkt B. 3), die

absolute Asymmetrie der Verteilung der Apices der gegen die Sonne am schnellsten bewegten Sterne und sogar die Verschiebung der Geschwindigkeitskörper verschiedener Sterngruppen gegeneinander und die Abhängigkeit der Größe dieser Verschiebung von der inneren Streuung der Geschwindigkeiten in diesen Gruppen (Punkt B. 5) erhielten alle im Rahmen dieser Theorie einen ihnen angemessenen Platz. Jedoch hatten sich bei dem näheren Vergleiche der Aussagen dieser Theorie mit den empirischen Befunden auch gewisse Unstimmigkeiten herausgestellt, die auf eine Abweichung der tatsächlichen Verhältnisse von dem einfachen der Theorie zugrunde liegenden Bilde eines in einem stationären Zustande befindlichen achsensymmetrischen Sternsystems mit einer Symmetrieebene schließen ließen, und es war in diesem Zusammenhange die Frage entstanden, ob die erwähnten Unstimmigkeiten eventuell durch kleine «Retouchen» an der Theorie beseitigt werden könnten, oder eine radikale Revision ihrer Grundlagen erforderlich machen, und überhaupt, ob ihre unbestreitbar ziemlich weitgehende Übereinstimmung mit der Erfahrung als stichhaltiges Argument zugunsten der Richtigkeit der von ihr vertretenen Grundvorstellungen über die Beschaffenheit des Galaktischen Systems und seinen Bewegungszustand betrachtet werden dürfe.

Bevor wir zur allgemeinen Behandlung dieser Frage übergehen, wollen wir, zur Erleichterung der Übersicht, zunächst hier die wesentlichsten Punkte zusammenstellen, in denen die Galaktische Rotationstheorie im Konflikte mit den Beobachtungstatsachen zu stehen scheint, wobei wir auch die «Retoucheversuche» kurz durchnehmen werden, die ihre Autoren zu ihrer besseren Anpassung an die Wirklichkeit in Vorschlag gebracht haben. Die von uns festgestellten Abweichungen können unter drei Stichworten zusammengefaßt werden; 1. Falsches Achsenverhältnis des Geschwindigkeitsellipsoids; 2. Abweichung der Vertexrichtung von der Richtung auf das Galaktische Zentrum; 3. K-Effekt.

1. Wie B. Lindblad durch direkte Untersuchung des *zweidimensionalen* Problems der Bewegungen der Sterne in der galaktischen Ebene und Berechnung ihrer *relativen* Bahnen in bezug auf einen eine Kreisbahn um die Zentralverdichtung beschreibenden Punkt gezeigt hat, müssen die Relativgeschwindigkeiten dieser Sterne in der galaktischen Ebene nach einem *elliptischen Häufigkeitsgesetze* verteilt sein, wobei die größere Achse der Häufigkeitsellipse in der radialen Richtung, also in der Richtung nach dem Mittelpunkte des Systems, liegen muß[13]). Da die empirisch bestimmte Vertexrichtung keinen allzu großen Winkel mit dieser Richtung bildet, kann dieses Ergebnis als eine Erklärung der längs der Vertexrichtung in zwei entgegen-

[13]) B. Lindblad, Arkiv für Mat., Astr. och Fys. *19 A*, Nr. 35, (1927), *20 A*, Nr. 17, (1927), *23 A*, Nr. 18, (1933) und Handbuch der Astrophysik Bd. V/2, S. 1047 (1933); auch M. N. *95*, 13, (1934) und Upsala Medd. Nr. 26 (1927).

gesetzten Richtungen stattfindenden *Sternströmung*, die wir unter B. 2 beschrieben haben, betrachtet werden. Nun ist aber diese Häufigkeitsellipse (unter der Annahme, daß ihre große Achse streng radial gerichtet ist) nur die Projektion auf die Milchstraßenebene des von der allgemeinen Theorie verlangten räumlichen Häufigkeitsellipsoids, und letzteres muß, wie wir S. 64 (Formel 107) gesehen haben, ein Rotationsellipsoid sein, dessen Rotationsachse zwar in der galaktischen Ebene liegt, aber keineswegs mit dem Radiusvektor zusammenfällt, sondern auf ihm senkrecht steht. Mit andern Worten, die «Beweglichkeit» der Sterne müßte in jeder in der das galaktische Zentrum enthaltenden galaktischen Meridianebene verlaufenden Richtung gleich groß sein, wie in der Richtung nach dem galaktischen Zentrum, und es könnte, falls die Beweglichkeit in der zu dieser Ebene senkrechten Richtung (der einzigen theoretisch ausgezeichneten Symmetrierichtung im Geschwindigkeitsellipsoid) kleiner ist, als in radialer Richtung (und dies wird durch den empirischen Befund bestätigt) eigentlich überhaupt von keiner Strömungs*richtung*, sondern nur von einer «Strömungsebene» die Rede sein. Demgegenüber hat die experimentelle Untersuchung zahlreicher Sterngruppen immer zu dem Ergebnisse geführt, daß der Geschwindigkeitskörper der Sterne unserer Umgebung viel eher als ein ausgestrecktes Rotationsellipsoid dargestellt werden kann, dessen große, annähernd nach dem Mittelpunkte des Systems weisende Achse zugleich seine Rotationsachse ist. Wenn auch auf letzteren Umstand kein allzu großes Gewicht gelegt werden kann, weil die tatsächliche Geschwindigkeitsverteilung auch durch ein dreiachsiges Geschwindigkeitsellipsoid approximiert werden kann, so ist doch die Tatsache, daß die zur Milchstraßenebene senkrecht stehende Ellipsoidenachse nicht ebenso groß wie die radiale Achse, sondern sogar eher etwas kleiner als die dritte, in der Milchstraße liegende tangentiale Achse ist, so gut belegt, daß an dem hier zwischen der Theorie und dem empirischen Befunde klaffenden Widerspruche schlechterdings kein Zweifel bestehen kann. Damit scheint aber auch die von LINDBLAD auf Grund einer sich auf die Bewegungen in der galaktischen Ebene beschränkenden, zweidimensionalen Betrachtung gegebene Erklärung der Sternströmung hinfällig zu werden.

In Wirklichkeit steht die Sache für die Rotationstheorie nicht so kritisch: die Ungleichheit der beiden in die galaktische Meridianebene fallenden Ellipsoidenachsen kann nämlich auch durch eine *kleine* Abweichung des Zustandes des Galaktischen Systems von einem stationären Zustande wenigstens bis zu einem gewissen Grade verständlich gemacht werden. Die in ihm anfangs zweifellos vorhanden gewesenen zufälligen Ungleichmäßigkeiten müßten nach einer genügenden Anzahl von Umdrehungen (etwa 10 – 50, wozu das System sicher Zeit gehabt haben muß) schon zu einem beträchtlichen Teile ausgeglichen worden sein, wobei die für den idealen stationären Zu-

stand geltenden Bedingungen für diejenigen Größen am genauesten erfüllt erscheinen müssen, bei denen die gegenseitige *statistische Bindung* am stärksten ist. Nun wird aber in einem so stark abgeplatteten System, wie das Milchstraßensystem, die Geschwindigkeitsverteilung längs der Z-Achse mit den übrigen Größen nur sehr schwach verbunden sein, da die für sie maßgebliche Kraftkomponente K_z mit ϖ nur sehr wenig veränderlich ist und daher *beinahe längs der ganzen Bahn eines Sternes als eine Funktion der Koordinate z allein* betrachtet werden darf. In diesem Falle ist aber die Bewegung eines Sternes in der Z-Richtung von seiner Bewegung parallel zur galaktischen Ebene praktisch unabhängig, und das von Hause aus dreidimensionale Problem zerfällt in zwei Teilprobleme — ein zweidimensionales und ein eindimensionales. Diese Zerlegung kann, nach LINDBLAD, folgendermaßen durchgeführt werden: wir bilden den Ausdruck

$$Z_0^2 = Z^2 - 2[V(\varpi, z) - V(\varpi, 0)] , \tag{67}$$

in dem $V(\varpi, 0)$ den Wert des Potentials an der Stelle ϖ in der galaktischen Ebene bezeichnet. Z_0 kann mit der Z-Komponente der Geschwindigkeit eines Sternes identifiziert werden, die er bei seinem Durchgange durch die galaktische Ebene besitzt. Der Fehler, den wir dabei begehen, rührt daher, daß der Stern die galaktische Ebene nicht im Punkte ϖ, 0, sondern in irgend einem anderen Punkte ϖ', 0, durchsetzt, so daß in (67) an Stelle von $V(\varpi, 0)$ richtig $V(\varpi', 0)$ einzusetzen wäre, jedoch ist der Unterschied bei nahezu kreisförmigen Bewegungen der Sterne nur klein. Da nach unserer Voraussetzung die in der Klammer stehende Differenz sich mit ϖ nur sehr langsam ändert, können wir sie als eine reine Funktion von z betrachten. Da ferner der einzelne Stern im allgemeinen irgendeine Schwingung in der Z-Richtung ausführen wird, können wir auch Z_0, die Geschwindigkeit, mit der er durch die Symmetrieebene geht, als eine für ihn charakteristische Konstante betrachten. Dann ist aber der Ausdruck (67) nichts anderes, als ein neues Integral der Bewegungsgleichungen, das zu den beiden Integralen I_1 und I_2, die für den strengen stationären Zustand allein gelten, hinzutritt. Wir müssen daher in diesem Falle eine allgemeinere Verteilungsfunktion $f(I_1, I_2, Z_0)$ betrachten, die von den drei Argumenten

$$I_1 = \text{const.} \; ; \quad I_2 = \text{const.} \; ; \quad Z_0^2 = \text{const.}$$

abhängt. Die durch diese Integrale bestimmten drei Hyperflächen schneiden aus unserem sechsdimensionalen Phasenraume einen dreidimensionalen Raum aus, der im allgemeinen, bei $I_1 < 0$, ein endliches Volumen haben wird. Wenn der Ausdruck (67) streng erfüllt wäre, dann müßten die Bahnkurven der einzelnen Sterne im stationären Zustande diesen Raum vollständig ausfüllen; da dies nur genähert der Fall ist, werden die Bahnkurven äußerst

langsam von einem durch drei diskrete Werte der Konstanten charakterisierten Raume zu einem anderen benachbarten übergehen, und die *Vermischung,* die als Endergebnis eine Verteilungsfunktion von nur zwei Argumenten I_1 und I_2 zustande zu bringen bestrebt ist, wird nur außerordentlich langsam stattfinden können. Wir können daher während einer sehr langen Zeit die Sterne mit großer Annäherung nicht nur nach den Werten ihrer Bewegungsintegrale I_1 und I_2, sondern auch nach dem ihnen zukommenden Werte von Z_0 klassifizieren. Für ein beliebig herausgegriffenes Intervall Z_0 bis $Z_0 + \Delta Z_0$ kann die Häufigkeit der Sterne dann beliebig vorgegeben werden (da zwischen den verschiedenen Z-Klassen von Sternen so gut wie kein Austausch stattfindet), und wir haben in der Umgebung der galaktischen Ebene für *jedes* solche Intervall eine zweidimensionale Verteilung der Form

$$f_1(I_1, I_2) \cdot \varpi\, d\varpi\, dz\, d\Pi\, d\Theta\, dZ_0$$

anzusetzen, wo

$$I_1 = \Pi^2 + \Theta^2 + Z_0^2 - 2V(\varpi, 0)\,; \quad I_2 = \varpi\Theta$$

sind, und $V(\varpi, 0)$ das für die galaktische Ebene geltende Potential bedeutet. Für Punkte, die außerhalb der galaktischen Ebene liegen, also für das dreidimensionale Problem, können wir dann die Verteilungsfunktion in der Form

$$f(I_1, I_2, Z_0^2) = f_1(I_1, I_2) \cdot F(Z_0^2)$$

ansetzen, wo $F(Z_0^2)$ eine willkürliche Funktion des Argumentes (67) ist[14]). Da je nach der Wahl dieser Funktion verschiedene Beziehungen zwischen den Streuungen der Geschwindigkeitskomponenten Π und Z für jeden Wert von ϖ erhalten werden können, brauchen diese Streuungen nicht mehr überall gleich zu sein, wie das beim streng stationären Zustande eines Sternsystems der Fall sein muß. Für die empirische Tatsache, daß die Streuung der Z-Komponenten in unserem Teile des Galaktischen Systems *kleiner* ist als die Streuung der Π-Komponenten, können verschiedene Erklärungen gegeben werden; eine solche Erklärung würde z. B. darin bestehen, daß die Geschwindigkeiten der meisten Sterne, wegen der schnellen Rotation, nur kleine Winkel mit der galaktischen Ebene bilden, und die Störungen, die bei gelegentlichen Begegnungen von den Sternen aufeinander ausgeübt werden, daher auch hauptsächlich in dieser Ebene erfolgen.[15])

---

[14]) Sie ist nur der einzigen Bedingung $F(0) = 1$ unterworfen, weil für $z = 0$, $Z = Z_0 = 0$ die Funktion f in f_1 übergehen muß. Über den Ansatz $\mathfrak{V}(\varpi, z) = \mathfrak{V}_1(\varpi) + \mathfrak{V}_2(z)$ für das Potential, der in diesem Falle die Verhältnisse wiedergibt, s. unten S. 191.

[15]) Die Bedingung der Gleichheit der beiden zur Θ-Richtung senkrechten Achsen des Geschwindigkeitsellipsoides, die für achsensymmetrische Systeme unter der Wirkung eines ganz beliebigen Potentials erfüllt sein muß, kann durch *spezielle Auswahl* der Potentialfunktion vermieden werden. Siehe näheres hierüber auf S. 191, 196, 197.

2. Wenn wir uns nun auf die Betrachtung der Verhältnisse in der galaktischen Ebene beschränken, so ist, wie wir unter B. 2 gesehen haben, die Verteilung der pekuliaren Sterngeschwindigkeiten wohl durch eine Häufigkeitsellipse darstellbar, deren große Achse die Vertexrichtung, also die Richtung der Sternströmung angibt. Theoretisch müßte diese Richtung mit der Richtung nach dem Mittelpunkte des Sternsystems zusammenfallen, die Sternströmung also rein radial sein. Wenn wir die Lage des SHAPLEYschen Symmetriemittelpunktes der räumlichen Verteilung der Kugelhaufen als Mittelpunkt des Galaktischen Systems betrachten, dann ist aber auch die eben genannte theoretische Forderung nicht erfüllt, denn die Vertexrichtung liegt zwar sehr genau in der Milchstraßenebene, jedoch in der galaktischen Länge 347°, 167°, die von der Richtung nach dem SHAPLEYschen Zentrum um einen Winkel von etwa 20° abweicht. Diese «Abweichung der Vertexrichtung» hat den Vertretern der strengen Rotationstheorie der Milchstraße viel Kopfzerbrechen verursacht und ist schließlich nur durch die Zulassung instabiler lokaler Sternströme, also unter teilweisem Verzichte auf die Grundbegriffe der Theorie einigermaßen befriedigend erklärt worden[16]). Die von B. LIND-

---

[16]) Ein Versuch die Abweichung der Vertexrichtung von der radialen Richtung durch Einführung einer systematischen Radialbewegung Π_0 neben einer systematischen Rotationsbewegung Θ_0 in den Ansatz (49) für die Verteilungsfunktion zu erklären, ist von S. W. SHIVESHWARKAR (M. N. *955*, 65, 1935) unternommen worden. Er geht von einem Ansatze der Form

$$f = F_0 e^{-a(\Pi - \Pi_0)^2 - b(\Theta - \Theta_0)^2 - h(\Pi - \Pi_0)(\Theta - \Theta_0)}$$

aus (seine Betrachtungen beschränken sich auf die Vorgänge in der Galaktischen Ebene), den er in die Grundgleichung (126) des 2. Kapitels, nach Weglassung aller auf die z-Koordinate bezüglichen, sowie der $\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)$ enthaltenden Glieder, jedoch unter Erweiterung der Gleichung mit dem für nichtstationäre Zustände hinzuzufügenden Gliede $\frac{\partial f}{\partial t}$, einsetzt. Da er aber im weiteren Verlaufe seiner Rechnung die Voraussetzung einführt, daß $F_0, a, b, h, \Pi_0, \Theta_0$ von der Zeit unabhängige Funktionen der Koordinaten sind, wird die letztgenannte Erweiterung illusorisch, und er behandelt in Wirklichkeit einen stationären Zustand eines Sternsystems mit achsensymmetrischem Potential. Ein solcher schließt, wie wir auf S. 62 gesehen haben, im allgemeinen eine radiale Strömung Π_0 der Sterne aus, jedoch kann, durch eine ganz spezielle Wahl der Potentialfunktion, auch diese Bedingung befriedigt werden. Wie O. HECKMANN (M. N. *96*, 67, 1935) und B. LINDBLAD (M. N. *96*, 71, 1935) denn auch unabhängig von einander gezeigt haben, ist die von SHIVESHWARKAR abgeleitete Formel für die «Abweichung der Vertexrichtung» nur für zwei ganz spezielle Formen der Potentialfunktion gültig, nämlich wenn das Kraftgesetz eine von den beiden Formen

$$K(\omega) = \frac{\text{const.}}{\omega^2} \quad \text{oder} \quad K(\omega) = \text{const.}\,\omega$$

hat, d. h. wenn das Potential entweder von einer Punktmasse, oder von einem Rotationsellipsoide mit gleichmäßiger Dichteverteilung herrührt. Siehe hierzu S. 162, 194.

LINDBLAD[17]) vorgeschlagene Erklärung, die hier nur ganz kurz in ihren Hauptzügen wiedergegeben werden soll, besteht im wesentlichen in der nachfolgenden Überlegung: auch in einem im allgemeinen stationären Sternsystem können durch vorübergehendes Zusammenrücken von Sternen, die solchen Sterngruppen angehören, deren innere Geschwindigkeitsstreuung unbeträchtlich ist, und die aus diesem Grunde bei ihrer Bewegung lange Zeit zusammenbleiben, lokale Schwankungen des regulären Verlaufs der räumlichen Sterndichte entstehen. Allerdings ist das Bestehen solcher lokaler Sternverdichtungen, zu denen vielleicht auch das unter A. 3 erwähnte «Lokale Sternsystem» gehören könnte, nur an eine gewisse beschränkte Zeit geknüpft, da sie durch die differentielle Rotation des Galaktischen Systems nach einer gewissen Anzahl von Umdrehungen wieder auseinandergerissen werden müßten, doch verursachen sie während ihres Bestehens: erstens, eine lokale Störung im Verlaufe des Potentials und zweitens, auch individuelle Störungen in den Bewegungen solcher Sterne, die zufällig in ihre Nähe geraten und die unter Umständen hierdurch in Bahnen gelenkt werden können, die von ihren ursprünglichen Bahnen merklich abweichen. Den Charakter dieser gestörten Bahnen hat B. LINDBLAD[18]) an dem Beispiel der Bewegung eines Massenpunktes im Felde eines homogenen abgeplatteten Rotationsellipsoides mit einer punktförmigen Massenverdichtung in seinem Mittelpunkte, im Falle daß die Bahnen anfänglich nur wenig von Kreisbahnen abweichen, untersucht. Wenn die Gesamtmasse des Ellipsoids mit M, sein Äquatorialdurchmesser mit $2a$, seine Exzentrizität mit e und die Masse der zentralen Verdichtung mit μM bezeichnet werden, wird die in seiner Äquatorebene wirkende Kraft K_ϖ bekanntlich durch den Ausdruck

$$K_\varpi = \frac{\partial V}{\partial \varpi} = -\frac{3}{2}\,\varpi\,\frac{\varkappa^2 M}{a^3 e^3}\left[-\frac{ae}{\varpi}\sqrt{1-\frac{a^2e^2}{\varpi^2}} + \arcsin\frac{ae}{\varpi^2}\right] - \frac{\varkappa^2 \mu M}{\varpi^2}$$

gegeben. Da diese Kraft radial gerichtet ist, kann ein Integral der Bewegung, das Flächenintegral, gleich hingeschrieben werden, und die Bahn des Sternes ergibt sich dann durch numerische Integration der sich hieraus ergebenden Differentialgleichung für $\bar{\omega}$ allein. Bei kleinen Störungen der ursprünglich als streng kreisförmig vorausgesetzten Bahn, ergeben sich für die

---

[17]) Arkiv för Mathematik, Astronomi och Fysik, 23 *A*, Nr. 18 (1933); Monthly Notices R.A.S. *94*, 231 (1933), *95*, 12, (1934) und 663 (1935).

[18]) Arkiv f. Math., Astr. och Fys. *19 A*, Nr. 35 (1927). Bekanntlich ist die Kreisbewegung unter der Einwirkung des NEWTONschen Gesetzes, und auch bis zu einer Abnahme der Anziehungskraft nach dem invers-kubischen Gesetze mit der Entfernung vom Mittelpunkte *stabil*, d. h. daß sich diese Bahnen bei kleinen Störungen in *geschlossene* kreisähnliche Bahnen verwandeln, darüber hinaus aber *instabil*, so daß sich die gestörte Bahn, sogar schon bei einer minimalen Störung, schließlich beliebig weit von der ursprünglichen Kreisbahn entfernt.

neuen Bahnen spiralförmige Windungen, die sich asymptotisch an die Kreisbahn anschließen, einen gewissen Maximal- oder Minimalabstand ϖ' vom Zentrum erreichen und sich dann wieder zusammenziehen oder ausdehnen. Bei beträchtlicheren Störungen wird die maximale erreichte Entfernung vom Mittelpunkte immer größer und kann sogar unendlich groß werden. Auf diese Erscheinungen werden wir im 4. Kapitel, bei der Betrachtung der zur Klasse der Spiralnebel gehörenden außergalaktischen Nebel, noch zurückkommen müssen. Es erscheint somit nicht ausgeschlossen, daß auch in den äußeren Teilen unseres Galaktischen Systems spiralförmige Sternströme durch kleine lokale Störungen hervorgerufen werden könnten. Diese Störungen könnten sowohl durch äußere Einwirkungen (z. B. Annäherungen anderer Systeme, die eine Flutwelle zur Folge haben müßten) als auch durch die obenerwähnten Ablenkungen, die einzelne Systemsterne bei Begegnungen mit lokalen Verdichtungen (wohl kaum mit einzelnen anderen Sternen) erfahren, verursacht werden. Letztere würden nämlich in solchen Fällen, wenn die Kreisbewegung des gestörten Sternes an sich schon wegen eines abnorm starken Potentialgefälles instabil geworden ist, besonders wirksam werden müssen.

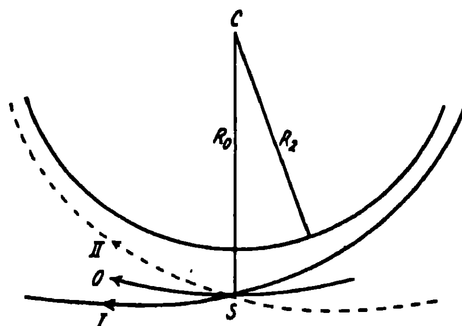


Abb. 10

Erklärung der «Abweichung der Vertexrichtung», nach B. Lindblad.

In Abb. 10 stellt S die Sonne dar, die sich im Abstande $\omega = R_0$ vom galaktischen Mittelpunkte C befindet; innerhalb des Kreises R_0, etwa zwischen $\omega = R_2 < R_0$ und $\omega = R_0$ möge aber die räumliche Dichte im System eine starke Schwankung erleiden. Wie sich auf Grund des für diesen Fall konstruierten LINDBLADschen Diagramms leicht zeigen läßt (worauf wir hier aber nicht näher eingehen wollen und auf die Originalarbeiten[19]) verweisen müssen), sind die Kreisbewegungen bei S instabil, so daß durch den Einfluß der oben erwähnten Störungen die Kreisbahnen einzelner Sterne leicht in

[19]) S. Fußnote 17 auf S. 128.

spiralförmige Bahnen verwandelt werden können. In der Abb. 10 sind zwei solche Bahnen *I* und *II* in der Umgebung der Sonne dargestellt, von denen sich die eine nach außen, die andere nach innen von der nahezu kreisförmigen Bahn der Sonne entfernt. Lindblad hat die Ansicht ausgesprochen, daß die sich in solchen Bahnen bewegenden Sterne den beiden KAPTEYN-EDDINGTONschen Sternströmen entsprechen könnten, die er mit den beiden wichtigsten bekannten «Bewegten Sternhaufen» – dem *Ursa Major-Strome* und dem *Perseus-Strome* – identifizieren möchte. Von der Sonne aus beurteilt, würden diese Sterne in der Tat in nahezu radialer Richtung zu strömen scheinen. Es wäre dann in der Umgebung der Sonne zwischen dem «natürlichen» Geschwindigkeitsellipsoid, das von den normalbewegten Sternen herrührt und dessen eine Achse streng nach dem Mittelpunkte des Galaktischen Systems weist, wie es die Rotationstheorie verlangt, und dem Geschwindigkeitskörper der den beiden Sternströmen angehörenden Sterne zu unterscheiden. Eine Beimischung von solchen Stromsternen zu dem Beobachtungsmateriale könnte nun natürlich leicht eine Abweichung der Vertexrichtung von der radialen Richtung vortäuschen, denn wenn auch die radialen Geschwindigkeiten der Stromsterne $\Pi_{,}$ und $\Pi_{,,}$ gleich und entgegengesetzt sein sollten, (für die strenge Kreisbewegung ist natürlich $\Pi_0 = 0$), brauchten die beiden Tangentialgeschwindigkeiten $\Theta_{,}$ und $\Theta_{,,}$, die sich nur sehr wenig von der Rotationsgeschwindigkeit Θ_0 unterscheiden, nicht unbedingt gleich zu sein, so daß eine Verdrehung der Vertexrichtung aus der radialen Richtung um einen durch die Formel

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Theta_{,,} - \Theta_{,}}{\Pi_{,} - \Pi_{,,}}$$

gegebenen Winkel φ durchaus auftreten könnte. Da die Bewegung auch bei den Stromsternen nur ganz wenig von der kreisförmigen Bewegung abweichen soll, bleiben auch für sie alle theoretischen Folgen der Rotationstheorie genähert gültig, jedoch könnte die aus dem differentiellen Rotationseffekt (Doppelwelle) erschlossene Richtung nach dem Zentrum des Systems durch den Einfluß der Stromsterne ebenfalls eine gewisse Verfälschung erleiden, was die Tatsache erklären würde, daß das aus einigen Sterngruppen abgeleitete Λ_0 (aus den Radialgeschwindigkeiten der $A-G$-Sterne sowie einiger Gruppen von $F-K$-Sternen, und aus den Eigenbewegungen von Sternen in größeren Deklinationen – s. z. B. die Tabelle 147 auf S. 892 von E. v. d. PAHLEN, Lehrbuch der Stellarstatistik), beträchtlich größer als 326° herauskommt und sich mehr dem normalen Werte der Vertexlänge, also 347°, nähert. Es handelt sich hierbei meistens um «gewöhnliche», d. h. unsere nächste Umgebung bildende Sterne, während die von OORT und anderen beim Studium der Doppelwelle benutzten besonders entfernten Objekte (wie z. B. die *B*-, *c*-,

O-, N-Sterne und die Veränderlichen der Cepheiden-Klasse) den richtigen Wert 326° ergeben. Unter den «gewöhnlichen», in der unmittelbaren Umgebung der Sonne versammelten Sternen müßte der Prozentsatz der einem der beiden Sternströme zugehörigen Sterne merklich größer sein, als bei den im weiten Umkreise zerstreuten Objekten, aus denen, gerade wegen ihrer beträchtlich größeren Entfernung und der Größe der Amplitude der bei ihnen beobachtbaren Doppelwelle, die Rotationskonstanten A und B besonders gut bestimmt werden können.

Bei dieser Auffassung würde man sich das «Lokale Sternsystem» als eine zufällig entstandene Sternansammlung vorzustellen haben, die für die Instabilität, der die spiralförmigen Sternströme ihre Entstehung verdanken, also für den abnormen Dichte- und Potentialgradienten in der Nähe der Sonne, mitverantwortlich zu halten wäre, die aber bereits durch den Effekt der differentiellen Rotation in der zum Radiusvektor senkrechten Richtung — nach den Sternbildern Carina und Cygnus — stark auseinandergezogen worden ist. Mit der Annahme, daß die Sterne unserer Umgebung zu einer lokalen Verdichtung gehören, würde auch die empirische Tatsache der verhältnismäßig sehr kleinen Streuung ihrer Geschwindigkeiten gut übereinstimmen.

3. Eine Erklärung des K-Effektes im Rahmen der Rotationstheorie ist, wie wir auf S. 111 gesehen haben, nicht möglich. Da ein solcher aber nur bei bestimmten Sterngruppen, namentlich den B-Sternen, die auch in anderen Beziehungen aus dem Rahmen etwas herausfallen, und ferner bei den K- und M-Riesen eine merkliche Größe erreicht (4 – 5 km/sec), kann die Bewegung dieser Gruppen als abnorm betrachtet werden, ohne daß dies einen Verzicht auf die Gültigkeit der Theorie für die viel zahlreicheren anderen Sterne zu bedeuten brauchte.

Die Grundtatsachen, die zur Aufstellung der Galaktischen Rotationstheorie geführt haben, nämlich 1. die ganz einseitige Verteilung der Apices der Schnelläufer und die asymmetrische Verschiebung der Geschwindigkeitskörper verschiedener Sterngruppen in einer zum Radiusvektor der Sonne in bezug auf den SHAPLEYschen Mittelpunkt des Galaktischen Systems nahezu senkrechten Richtung; 2. die Doppelwelle in den Radialgeschwindigkeiten und Eigenbewegungen, die sich sehr leicht durch eine differentielle Rotation erklären läßt; 3. die große, für die Sonnenbewegung aus den Radialgeschwindigkeiten der Kugelhaufen gefundene Geschwindigkeit, die ebenfalls nahezu senkrecht zum Radiusvektor gerichtet ist und die relativen Geschwindigkeiten der Sterne unserer Umgebung um ein Vielfaches übersteigt, legen allerdings den Gedanken nahe, daß die große Masse der Sterne ähnliche Bahnen mit der Sonne in einem für sie äußeren Gravitationsfelde beschreiben, die sich nur wenig von Kreisbahnen unterscheiden. Aber gerade die letzte

Annahme, die das charakteristische Merkmal der Galaktischen Rotationstheorie bildet, stellt möglicherweise eine zu weitgehende Vereinfachung und Idealisierung der Verhältnisse dar, was durch die oben hervorgehobenen Unstimmigkeiten, zu denen die strenge Anwendung dieser Theorie führt, bestätigt zu werden scheint. Andererseits wird man aber auch die zweifellos sehr weitgehenden, in der Rotationstheorie enthaltenen Erklärungsmöglichkeiten für die im Galaktischen System beobachteten Bewegungserscheinungen nicht leichten Herzens über Bord werfen wollen, und es stellt sich uns daher hier die Frage, ob diese Erklärungen mit der Annahme nahezu kreisförmiger Bewegungen stehen und fallen, oder vielleicht auch bei allgemeineren Voraussetzungen über die Art der Bewegungen noch ihre Gültigkeit behalten. Um einer Antwort auf diese Frage näher zu kommen, wollen wir uns zunächst auf den der Rotationstheorie, die ein ganz präzises Bild von den dynamischen Verhältnissen im Galaktischen System entwerfen zu können meint, gerade entgegengesetzten Standpunkt stellen und annehmen, daß uns über diese Verhältnisse so gut wie gar nichts bekannt ist. Wir gehen also jetzt von der einzigen Voraussetzung aus, daß das die Umgebung der Sonne bildende Stück des Sternsystems ein *Strömungsfeld* der in ihm enthaltenen Sterne darstellt, d. h. daß es durch eine stetige Verteilungsfunktion $f(x, y, z, u, v, w, t)$ der Koordinaten, der Geschwindigkeitskomponenten und der Zeit, (die Forderung der Stationarität lassen wir ausdrücklich fallen) charakterisiert werden kann, und daß die mittleren Geschwindigkeiten $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ als stetige Funktionen der Koordinaten betrachtet werden dürfen. Die Theorie eines solchen *Strömungsfeldes* ist von K. OGRODNIKOFF[20]), in Anlehnung an einen Gedanken von E. HOPF, in zwei Dimensionen, von K. PILOWSKI[21]) und E. MILNE[22]) in drei Dimensionen, unabhängig von einander entwickelt worden. Da die von E. MILNE gegebene Untersuchungsmethode die übersichtlichste und eleganteste ist, wollen wir uns auf ihre Wiedergabe beschränken. Die Frage, die wir uns hier mit MILNE vorlegen, besteht also darin, inwiefern die im Galaktischen System beobachteten Bewegungserscheinungen als Relativbewegungen eines kleinen Flüssigkeitsvolumens in bezug auf ein mitbewegtes Teilchen *rein kinematisch*, durch Zerlegung dieser Relativbewegung nach der STOKESschen Methode in drei differentielle Transformationen – eine Verschiebung, eine Drehung und eine Zerrung – gedeutet werden können. Es seien x, y, z die rechtwinkeligen Koordinaten eines Sternes in irgendeinem Inertialsysteme, u, v, w – seine auf dieselben Achsen bezogenen Ge-

---

[20]) K. OGRODNIKOFF, Zeitschrift für Astrophysik, Bd. 4, S. 190 (1932).

[21]) K. PILOWSKI. Ztschrift f. Ap. Bd. 3, S. 53, 279, 291 (1931); Bd. 4, S. 396 (1932).

[22]) E. MILNE, Monthly Notices, *95*, 560, (1935). Eine Ausdehnung von MILNES Überlegungen auf Glieder zweiter Ordnung ist von EDMONDSON, M. N. *97*, 478, (1937) durchgeführt worden.

schwindigkeitskomponenten und $f(x, y, z, u, v, w, t)$ — die den Zustand des Systems bei x, y, z zur Zeit t charakterisierende Verteilungsfunktion. Die räumliche Sterndichte ν ist dann zur Zeit t, nach Formel (50) des 1. Kapitels

$$\nu = \nu(x, y, z, t) = \int\int\int f \cdot du\, dv\, dw\ , \qquad (68)$$

und die mittlere Geschwindigkeit der Sterne am Orte x, y, z zur Zeit t wird durch die Ausdrücke

$$\bar{u} = \bar{u}(x, y, z, t) = \frac{1}{\nu}\int\int\int f\, u\, du\, dv\, dw\ ; \quad \bar{v} = \frac{1}{\nu}\int\int\int f\, v\, du\, dv\, dw\ ;$$
$$\bar{w} = \frac{1}{\nu}\int\int\int f\, w\, du\, dv\, dw \qquad (69)$$

gegeben. Die Sonne, also der Standpunkt, von dem aus wir alle Bewegungen im Sternsystem beurteilen, möge sich zur Zeit t im Punkte x_0, y_0, z_0 befinden und die Geschwindigkeitskomponenten u_0, v_0, w_0 in bezug auf das gewählte Koordinatensystem besitzen. In diesem Punkte ist die räumliche Sterndichte $\nu_0 = \nu_0(x_0, y_0, z_0, t)$ und die mittlere Geschwindigkeit der die Sonne unmittelbar umgebenden Sterne, die keineswegs mit der Geschwindigkeit der Sonne an derselben Stelle übereinzustimmen braucht, sondern sich aus (69) bei Einsetzen von x_0, y_0, z_0 für x, y, z ergibt, ist:

$$\bar{u}_0 = \bar{u}(x_0, y_0, z_0, t)\ ; \quad \bar{v}_0 = \bar{v}(x_0, y_0, z_0, t)\ ; \quad \bar{w}_0 = \bar{w}(x_0, y_0, z_0, t)\ .$$

Die «lokale» Sonnengeschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit der Sonne in bezug auf den Schwerpunkt der Sterne ihrer allernächsten Umgebung, oder, wie man zu sagen pflegt, in bezug auf das «Lokale Zentroid», bezeichnen wir dementsprechend mit

$$s_x = u_0 - \bar{u}_0\ ; \quad s_y = v_0 - \bar{v}_0\ ; \quad s_z = w_0 - \bar{w}_0\ . \qquad (70)$$

Da diese Geschwindigkeit, als die eines einzelnen Sternes, in keiner inneren Beziehung zu den im Sternfelde eventuell auftretenden statistischen Gesetzmäßigkeiten steht, interessiert sie uns auch nicht weiter, muß aber als *gemeinsame Verschiebung* des zu erhaltenden Geschwindigkeitskörpers natürlich berücksichtigt werden. Wir denken sie uns im folgenden von allen zu untersuchenden Sterngeschwindigkeiten abgezogen und studieren nur die auf das Lokale Zentroid bezogenen Bewegungen der Sterne, d. h. auf den mit der mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{w}_0$ im Inertialsystem bewegten Punkt x_0, y_0, z_0, in dem sich die Sonne zur Zeit t gerade befindet. In diesem Punkte führen wir ein mit ihm fest verbundenes Koordinatensystem ein, dessen Achsen Ξ, H, Z denjenigen des Inertialsystems X, Y, Z parallel sein mögen, und bestimmen die Lage eines Punktes in diesem System einmal durch Angabe seiner rechtwinkeligen Koordinaten ξ, η, ζ,

$$\xi = x - x_0\,, \quad \eta = y - y_0\,, \quad \zeta = z - z_0 \tag{71}$$

und zweitens durch seine sphärischen Koordinaten, die wir durch die Beziehungen

$$\xi = \varrho\cos\beta\cos\lambda\,; \quad \eta = \varrho\cos\beta\sin\lambda\,; \quad \zeta = \varrho\sin\beta\,; \quad (\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \tag{71'}$$

definieren. (Wenn die ΞH-Ebene mit der galaktischen Ebene zusammenfällt, was hier noch nicht vorausgesetzt werden soll, gehen β und λ bzw. in die galaktische Breite und – bis auf eine additive Konstante – in die galaktische Länge über.) Wie aus der Abb. 11 sofort zu ersehen, bestimmen die drei Fortschreitungsrichtungen der wachsenden Koordinaten ϱ, λ, β, bei Festhaltung der beiden anderen Koordinaten, in jedem Raumpunkte S ein orthogonales Achsensystem, und da wir im weiteren Gelegenheit haben werden,

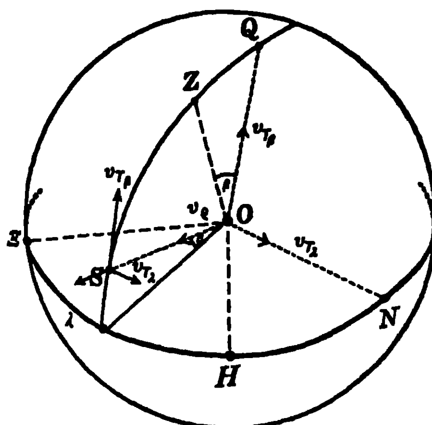


Abb. 11

Zerlegung einer Sterngeschwindigkeit in eine radiale Komponente v_ϱ und zwei tangentiale Komponenten, $v_{T\lambda}$ parallel zur galaktischen Ebene und $v_{T\beta}$ in der zu dieser senkrechten Ebene.

die Sterngeschwindigkeiten in ihre Komponenten gerade nach diesen Achsen zu zerlegen, wollen wir hier zunächst ein für allemal die zwischen letzteren und den, gleichfalls auf das mit der Geschwindigkeit $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$, $\bar{w}_0$ bewegte Lokale Zentroid bezogenen, Cartesischen Komponenten

$$v_\xi = u - \bar{u}_0\,; \quad v_\eta = v - \bar{v}_0\,; \quad v_\zeta = w - \bar{w}_0 \tag{72}$$

bestehenden Beziehungen ableiten. Die neuen Komponenten bezeichnen wir bzw. mit

v_ϱ – die radiale Komponente (Radialgeschwindigkeit, korrigiert für die lokale Sonnengeschwindigkeit),

v_{T_λ} — die transversale Komponente in Länge (parallel zu der ΞH-Ebene),

v_{T_β} — die transversale Komponente in Breite (senkrecht zu v_ϱ und $v_{T\lambda}$).

Die beiden letzten Komponenten werden experimentell durch die in Bogenmaß bestimmbaren Eigenbewegungen der Sterne gegeben[23]). Letztere sind als für die lokale apexiale Bewegung der Sonne korrigiert zu denken.

Nun ist offenbar

$$v_\varrho = v_\xi \cos(\varrho\,\Xi) + v_\eta \cos(\varrho H) + v_\zeta \cos(\varrho Z) \quad , \tag{73}$$

und analoge Ausdrücke gelten auch für die beiden anderen Komponenten, die durch Einsetzen der ihnen entsprechenden Winkelkosinuse erhalten werden. Aus der Abb. 11 ergibt sich aber unmittelbar:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{für die } \varrho\text{-Richtung:} & \cos(\varrho\,\Xi) = \cos\beta\cos\lambda;\ \cos(\varrho H) = \cos\beta\sin\lambda; \\
& \cos(\varrho Z) = \sin\beta \\
\text{für die } \lambda\text{-Richtung:} & \cos(T_\lambda \Xi) = \cos(\lambda + 90^0) = -\sin\lambda; \\
& \cos(T_\lambda H) = \cos[(90^0 + \lambda) - 90^0] = \cos\lambda \\
& \cos(T_\lambda Z) = 0 \\
\text{für die } \beta\text{-Richtung:} & \cos(T_\beta \Xi) = \cos(\beta + 90^0)\cos\lambda = -\sin\beta\cos\lambda \\
& \cos(T_\beta H) = \cos(\beta + 90^0)\sin\lambda = -\sin\beta\sin\lambda \\
& \cos(T_\beta Z) = \cos\beta\,.
\end{array}\right\} \tag{74}$$

Es ist daher

$$\begin{aligned}
v_\varrho &= v_\xi \cos\beta\cos\lambda + v_\eta \cos\beta\sin\lambda + v_\zeta \sin\beta \\
v_{T_\lambda} &= -v_\xi \sin\lambda + v_\eta \cos\lambda \\
v_{T_\beta} &= -v_\xi \sin\beta\cos\lambda - v_\eta \sin\beta\sin\lambda + v_\zeta \cos\beta\,.
\end{aligned} \tag{75}$$

Wir fangen mit der Betrachtung der Radialgeschwindigkeiten an. Die erste Formel (75) kann wegen (71′) und (72) auch in der Form

$$v_\varrho = (u - \bar{u}_0)\,\frac{\xi}{\varrho} + (v - \bar{v}_0)\,\frac{\eta}{\varrho} + (w - \bar{w}_0)\,\frac{\zeta}{\varrho} \tag{76}$$

geschrieben werden, und wir erhalten für die mittlere Radialgeschwindigkeit der Sterne, die in einem Volumenelemente bei ξ, η, ζ enthalten sind (in bezug auf das lokale Zentroid $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$)

$$\bar{v}_\varrho = (\bar{u} - \bar{u}_0)\,\frac{\xi}{\varrho} + (\bar{v} - \bar{v}_0)\,\frac{\eta}{\varrho} + (\bar{w} - \bar{w}_0)\,\frac{\zeta}{\varrho}\,. \tag{77}$$

Wir nehmen nun an, daß der Abstand ϱ der betrachteten Sterngruppe bei ξ,

---

[23]) Die Umrechnung geschieht durch Multiplikation der in Bogensekunden pro Jahr gegebenen Eigenbewegung mit dem Umrechnungsfaktor $k = 4{,}74$ (s. S. 91) und der Entfernung in Parsec. Das Ergebnis ist dann die lineare Geschwindigkeit in Kilometern pro Sekunde.

η, ζ von der Sonne als eine kleine Größe erster Ordnung betrachtet werden darf. (Wenn wir den Anfangspunkt unseres Inertialsystems in den Mittelpunkt des Galaktischen Systems verlegen, so bedeutet diese Annahme, daß der Abstand ϱ (Sonne—Sterngruppe) klein sein soll im Vergleiche zu den Abständen $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ der Sonne, bzw. der Sterngruppe vom Mittelpunkte des Systems.) Wir können dann die Differenzen $\bar{u} - \bar{u}_0, \bar{v} - \bar{v}_0, \bar{w} - \bar{w}_0$, in TAYLORsche Reihen nach den Potenzen von ξ, η, ζ entwickeln und die Entwicklung bei den ersten Potenzen dieser Größen abbrechen. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} \bar{u} - \bar{u}_0 &= \xi \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_0 + \eta \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_0 + \zeta \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)_0 \\ \bar{v} - \bar{v}_0 &= \xi \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)_0 + \eta \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)_0 + \zeta \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)_0 \\ \bar{w} - \bar{w}_0 &= \xi \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)_0 + \eta \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right)_0 + \zeta \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right)_0 . \end{aligned} \tag{78}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (77) ein, so ergibt sich für $\bar{v}_\varrho$ ein in den Koordinaten ξ, η, ζ quadratischer Ausdruck der Form

$$\bar{v}_\varrho (x, y, z, t) = \frac{1}{\varrho} [A \xi^2 + B \eta^2 + C \zeta^2 + 2 F \eta \zeta + 2 G \zeta \xi + 2 H \xi \eta] \tag{79}$$

mit den Koeffizienten

$$A = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_0 \quad B = \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)_0 \quad C = \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right)_0 \tag{80}$$

$$F = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right]_0 \quad G = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right]_0 \quad H = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right]_0 ,$$

in denen wir die Komponenten eines symmetrischen Tensors

$$T = \begin{matrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{matrix}$$

erkennen. Bekanntlich nimmt die quadratische Form (79) bei festgehaltenem ϱ längs zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen, die mit zwei Achsen des durch (79) definierten Ellipsoids zusammenfallen, einen größten und einen kleinsten Wert an. Es gibt für die von der lokalen Sonnenbewegung befreiten Radialgeschwindigkeiten der Sterne im Raume also zwei ausgezeichnete, zueinander senkrechte Richtungen, in denen ihre Mittelwerte einen Maximal-, bzw. einen Minimalwert erreichen.

Wir wollen nun den Mittelwert $K(\varrho)$ der mittleren Radialgeschwindigkeiten für Sterne in einem konstanten Abstande ϱ von der Sonne über den ganzen Himmel bilden. Unter Benutzung der sphärischen Koordinaten (71') und

des Oberflächenelementes der Einheitskugel $d\omega = \cos\beta\, d\beta\, d\lambda$, ist die Integration leicht auszuführen, da nur die ξ^2, η^2, ζ^2 enthaltenden Glieder einen von Null verschiedenen Beitrag ergeben; wir erhalten

$$K(\varrho) = \frac{1}{\varrho}\int\int (A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2F\eta\zeta + 2G\zeta\xi + 2H\xi\eta)\frac{d\omega}{4\pi} =$$
$$= \frac{1}{3}\varrho(A + B + C) = \frac{1}{3}\varrho\left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right)_0\right]. \qquad (81)$$

Der Ausdruck $(A + B + C)$ ist, wie aus (80) und (81) sofort zu ersehen, gleich der *Divergenz* des die mittlere Geschwindigkeit an der Stelle $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ ausdrückenden Vektors $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$; je nachdem diese Größe also positiv oder negativ ausfällt, haben wir an der betreffenden Stelle des Systems eine allgemeine Dilatation oder eine allgemeine Kontraktion. Wir erkennen hierin den konstanten (von der Richtung unabhängigen) K-Effekt und sehen, daß er eine Funktion der Entfernung ϱ ist; er wird daher bei der Untersuchung entfernterer Sterngruppen, wegen seines für diese größeren Betrages, leichter festzustellen sein.[24])

Wir gehen nun dazu über, das Verhalten von $\bar{v}_\varrho$ *in irgend einer beliebig gewählten, durch die Sonne gehenden Ebene* zu studieren, und richten unser Augenmerk vor allem auf die Abhängigkeit des $\bar{v}_\varrho$ von der Längenkoordinate λ. Da die Orientierung unseres Koordinatensystems eine ganz beliebige

---

[24]) W. M. Smart hat darauf hingewiesen (s. Stellar Dynamics, S. 409, 1938), daß der hier angegebene Milne'sche K-Effekt nicht ganz genau dem richtungsunabhängigen Teile von $\bar{v}_\varrho$ entspricht. Setzen wir nämlich die durch (71') definierten sphärischen Koordinaten anstatt ξ, η, ζ, in (79) ein, so erhalten wir nach einer leichten Umformung

$$\bar{v}_\varrho = \frac{\varrho}{4}\Big[(A + B + 2C) + (A + B - 2C)\cos 2\beta + 4(F\sin\lambda + G\cos\lambda)\sin 2\beta +$$
$$+ \left\{(A - B)\cos 2\lambda + 2H\sin 2\lambda\right\}\left\{1 + \cos 2\beta\right\}\Big] .$$

Der von der durch die Breite und Länge β, λ, bestimmten Richtung ganz unabhängige Bestandteil von $\bar{v}_\varrho$ ist daher eigentlich

$$\frac{\varrho}{4}(A + B + 2C)$$

und kann auch als der «K-Effekt» betrachtet werden. Bei der Integration des obenstehenden Ausdrucks für $\bar{v}_\varrho$ über die ganze Sphäre (wobei er zuerst mit dem Flächenelemente der Einheitskugel $d\omega = \cos\beta\, d\beta\, d\lambda$ zu multiplizieren ist) fallen alle die Länge λ enthaltenden Glieder weg, während das zweite, nur von β abhängende Glied

$$\frac{\varrho}{4}\,\frac{A + B - 2C}{3}$$

liefert, was mit dem ersten Gliede zusammen den Milneschen Wert (81) ergibt. Da die beiden Werte, bei der Untersuchung der Variation von $\bar{v}_\varrho$ mit λ in einer Ebene ($\beta = 0$) zusammenfallen, ist es vielleicht zweckmäßiger die Bezeichnung «K-Effekt» der mit der Divergenz des Geschwindigkeitsvektors in der einfachen durch (81) zum Ausdrucke gebrachten Weise zusammenhängenden Milneschen Größe vorzubehalten.

war, können wir die Erscheinungen in dessen ΞH-Ebene studieren, die dann ja auch ganz beliebig ist. Zu diesem Zwecke setzen wir in (79) $\zeta = 0$ und erhalten dann

$$\bar{v}_\varrho = \frac{1}{\varrho}(A\xi^2 + 2H\xi\eta + B\eta^2) \tag{82}$$

oder in Polarkoordinaten, indem wir $\beta = 0$ setzen,

$$\bar{v}_\varrho = \varrho[\tfrac{1}{2}(A+B) + \tfrac{1}{2}(A-B)\cos 2\lambda + H\sin 2\lambda]\ . \tag{83}$$

Dieser Ausdruck hat zwei Maxima und zwei Minima in den durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} 2\lambda = \frac{2H}{A-B} \tag{84}$$

gegebenen aufeinander senkrecht stehenden Richtungen λ. Durch eine einfache Drehung der Achsenrichtungen in der ΞH-Ebene, indem wir die Anfangsrichtung, von der aus wir die λ zählen wollen, in eine durch die Bedingungen:

$$\tfrac{1}{2}(A-B) = -H'\sin 2\lambda_0\ ; \quad H = H'\cos 2\lambda_0 \tag{85}$$

bestimmte Richtung λ_0 legen, läßt sich (84) in die Form

$$\bar{v}_\varrho = \varrho[K' + H'\sin 2(\lambda - \lambda_0)] \tag{86}$$

überführen, mit den Parametern:

$$K' = \tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$H' = [H^2 + \tfrac{1}{4}(A-B)^2]^{\frac{1}{2}}; \quad \operatorname{tg} 2\lambda_0 = -\frac{A-B}{2H}. \tag{87}$$

In dieser Form ist der Ausdruck für $\bar{v}_\varrho$ mit dem Ausdrucke (17) identisch, und wir sehen also, daß unter den hier gemachten ganz allgemeinen Voraussetzungen, der Gang der mittleren Radialgeschwindigkeiten in *jeder willkürlich gewählten*, durch unseren Beobachtungsort gehenden Ebene durch einen «konstanten», d. h. von der Länge $\lambda' = \lambda - \lambda_0$ unabhängigen K-Term vom Betrage $\varrho K'$ und eine sich ihm überlagernde Doppelwelle mit der Amplitude $\varrho H'$ dargestellt werden kann. Wir schließen hieraus, daß das Auftreten gerade dieser beiden Effekte (oder der Doppelwelle allein, da ja der K-Effekt bei vielen Sterngruppen einen verschwindenen Wert hat), bei der Untersuchung der Verteilung der Radialgeschwindigkeiten in der Milchstraßenebene, nicht als Beweis für die Richtigkeit der Grundannahme einer galaktischen «Rotation» betrachtet werden kann, sondern daß wir es hier mit einem viel allgemeineren Phänomen zu tun haben, das unter der alleinigen Voraussetzung, daß die Komponenten der mittleren Geschwindigkeiten der Sterne stetige Ortsfunktionen sind, in *jeder* durch den Bezugspunkt gehenden Ebene in Erscheinung treten muß. Allerdings ist die Lage der Maxima und Minima der Doppelwelle, die durch die Richtung λ_0 festgelegt wird, an sich ganz

beliebig, da sie von der Wahl der Werte der Koeffizienten A, B, H abhängt; diese braucht daher mit der Richtung nach dem Mittelpunkt des von den Kugelhaufen gebildeten Systems, oder irgend einer anderen durch den *allgemeinen* räumlichen Aufbau des Galaktischen Systems ausgezeichneten Richtung nichts zu tun zu haben, denn sie wird ja ausschließlich durch die auf den örtlichen Bewegungszustand bezüglichen Größen bestimmt. In diesem Punkte ist also die hier betrachtete Theorie etwas zu allgemein, und die Tatsache, daß die Behandlung der mittleren Radialgeschwindigkeiten der Sterne in der Milchstraße für den Wert von λ_0 gerade den Wert der galaktischen Länge des SHAPLEYschen Mittelpunktes, wenigstens für eine beträchtliche Anzahl von Sterngruppen ergibt, gibt uns das Recht, den von unserer Theorie gelassenen, zu weiten Spielraum durch Einführung etwas speziellerer Annahmen über die Art der Bewegungen einzuengen, wenn auch die sehr weitgehende Spezialisierung der Galaktischen Rotationstheorie auch dann noch keine vollständige Rechtfertigung erhält.

Wir wenden uns nun der Betrachtung der Transversalkomponenten der Geschwindigkeiten zu, über deren Beschaffenheit uns die Untersuchung der Eigenbewegungen der Sterne Aufklärung gibt. Um die Analogie mit der Behandlung der Radialgeschwindigkeiten zu wahren, wollen wir die Transversalkomponenten zunächst auch in Cartesischen Koordinaten erhalten und ersetzen daher in der zweiten und dritten Formel (75) die Länge λ und die Breite β durch ξ, η, ζ mittelst der aus Abb. 11 sofort abzulesenden Beziehungen

$$\sin\lambda = \frac{\eta}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}}\,; \quad \cos\lambda = \frac{\xi}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}}\,; \quad \sin\beta = \frac{\zeta}{\varrho}\,;$$
$$\cos\beta = \frac{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}}{\varrho}\,. \tag{88}$$

Damit wird, wegen (72)

$$v_{T_\lambda} = \frac{-(u-\bar{u}_0)\cdot\eta + (v-\bar{v}_0)\xi}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}}\,;$$
$$v_{T_\beta} = \frac{-(u-\bar{u}_0)\zeta\xi - (v-\bar{v}_0)\zeta\eta + (w-\bar{w}_0)(\xi^2+\eta^2)}{\varrho(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

und indem wir, wie früher, die Mittelwerte bilden

$$\bar{v}_{T_\lambda} = \frac{-(\bar{u}-\bar{u}_0)\eta + (\bar{v}-\bar{v}_0)\xi}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}}\,;$$
$$\bar{v}_{T_\beta} = \frac{-(\bar{u}-\bar{u}_0)\zeta\xi - (\bar{v}-\bar{v}_0)\zeta\eta + (\bar{w}-\bar{w}_0)(\xi^2+\eta^2)}{\varrho(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{89}$$

Indem wir nun hierin die Ausdrücke (78) für die Geschwindigkeitskomponenten einsetzen, erhalten wir

$$\bar{v}_{T_\lambda} = (\xi^2+\eta^2)^{-\frac{1}{2}} \left[-\eta \left\{\xi\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_0 + \eta\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_0 + \zeta\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)_0\right\} + \right.$$
$$\left. + \xi\left\{\xi\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)_0 + \eta\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)_0 + \zeta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0\right\}\right] \tag{90}$$

$$\bar{v}_{T_\beta} = \frac{(\xi^2+\eta^2)^{-\frac{1}{2}}}{\varrho}\left[-\zeta\xi\left\{\xi\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_0 + \eta\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_0 + \zeta\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)_0\right\} - \right.$$
$$-\zeta\eta\left\{\xi\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)_0 + \eta\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)_0 + \zeta\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)_0\right\} + \tag{91}$$
$$\left. + (\xi^2+\eta^2)\left\{\xi\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)_0 + \eta\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right)_0 + \zeta\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right)_0\right\}\right].$$

Die Umrechnung auf die Eigenbewegungen $\bar{\mu}_\lambda$ und $\bar{\mu}_\beta$ in Länge und Breite geschieht mit Hilfe der Beziehungen

$$\bar{v}_{T\lambda} = k\varrho\,\bar{\mu}_\lambda \cos\beta\,, \qquad \bar{v}_{T_\beta} = k\varrho\,\bar{\mu}_\beta\,, \tag{92}$$

wo $k = 4{,}74$ ist[25]). Mit Hilfe dieser Formeln kann nun auch der Gang der Komponenten der mittleren Eigenbewegungen in jeder beliebigen durch die Sonne gehenden Ebene genau so untersucht werden, wie dies oben für die mittleren Radialgeschwindigkeiten geschehen ist, indem wir nämlich in (90) und (91) $\zeta = 0$ setzen. Uns interessiert hier in erster Linie die Formel (90), die in diesem Falle in

$$v_{T_\lambda} = \varrho\left[\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_0\right\} + \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)\right\}\cos 2\lambda + \right. \tag{93}$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)_0 - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_0\right\}\sin 2\lambda\right]$$
$$= \varrho[\omega_3 + H\cos 2\lambda + \tfrac{1}{2}(B-A)\sin 2\lambda] = \varrho[\omega_3 + H'\cos 2(\lambda-\lambda_0)]$$

---

[25]) Der Vollständigkeit halber sollen hier die beiden Formeln (90) und (91) für die Eigenbewegungen in λ und β, in der dem Astronomen geläufigeren, die sphärischen Koordinaten des Sternfeldes (auf das sich die Mittelwertbildung bezieht) enthaltenden Form angeführt werden, die sich leicht aus (90) und (91) mittelst (88) erhalten lassen. Es ist

$$k\,\bar{\mu}_\lambda \cos\beta = \cos\beta\,[\omega_3 + H\cos 2\lambda - \tfrac{1}{2}(A-B)\sin 2\lambda] + \sin\beta\left[\cos\lambda\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)_0 - \sin\lambda\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)_0\right] \tag{90'}$$

$$k\,\bar{\mu}_\beta = \sin 2\beta\left[-\frac{A-B}{4}\cos 2\lambda - \frac{H}{2}\sin 2\lambda - \frac{A+B-2C}{4}\right] +$$
$$+ \cos 2\beta\,[G\cos\lambda + F\sin\lambda] - \omega_2\cos\lambda + \omega_1\sin\lambda\,. \tag{91'}$$

Hierin ist ω_3 durch (94) gegeben, während

$$2\omega_1 = \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right]_0, \quad 2\omega_2 = \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right]_0 \tag{94'}$$

bzw. die X- und Y-Komponente der Rotation des Strömungsvektors $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, an der Stelle $\xi = \eta = \zeta = 0$ sind. (s. W. M. Smart, Stellar Dynamics, p. 409, 410).

übergeht, wo A, B, H, H', λ_0 die in (80), (85) angegebene Bedeutung haben, während

$$2\,\omega_3 = \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right]_0 \tag{94}$$

die Z-Komponente der Rotation des Geschwindigkeitsvektors $\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{w}_0$ ist. Ein Vergleich der Formel (93) mit Formel (15) zeigt, daß auch der für die Eigenbewegungen der Sterne parallel zu der galaktischen Ebene in dieser Ebene gefundene Gang keineswegs als Beweis für eine in dieser Ebene stattfindende «Rotation» zu betrachten ist, sondern, wie bei den Radialgeschwindigkeiten, eine viel allgemeinere Erscheinung darstellt, die, sobald die Komponenten des «Strömungsfeldes» stetige Funktionen der Koordinaten sind, in jeder beliebig orientierten Ebene auftreten muß, wobei die «OORTsche Rotationskonstante B» einfach gleich dem doppelten Werte der auf der betrachteten Ebene senkrecht stehenden Komponente der Rotation des Strömungsvektors $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ist, während die Amplitude der Doppelwelle und die Orientierung der Maxima und Minima durch dieselben nach (85) zu berechnenden Konstanten H' und λ_0, wie bei den Radialgeschwindigkeiten, ausgedrückt werden, jedoch gegen diese um einen Winkel von 45° im negativen Sinne (im Sinne des Uhrzeigers) verdreht erscheinen. Die von uns gemachte ganz allgemeine Voraussetzung über die Bewegungsverhältnisse in der Umgebung der Sonne genügt also schon, um für jede durch die Sonne gehende, beliebig orientierte Ebene ein Bild des Verhaltens der mittleren Radialgeschwindigkeiten und der mittleren Eigenbewegungen parallel zu dieser Ebene zu ergeben, das in allen charakteristischen Zügen mit dem für die Milchstraßenebene empirisch gefundenen und von J. H. OORT und B. LINDBLAD unter der speziellen Annahme einer Rotation des Milchstraßensystems theoretisch abgeleiteten Bilde übereinstimmt.

Die oben für ein willkürliches Strömungsfeld $\bar{u}(x, y, z, t)$, $\bar{v}(x, y, z, t)$, $\bar{w}(x, y, z, t)$ abgeleiteten Ergebnisse wollen wir nun für unser Galaktisches System spezialisieren. Zu diesem Zwecke verlegen wir den Anfangspunkt 0 unseres Inertialsystems X, Y, Z in den Mittelpunkt des Galaktischen Systems, und lassen die XY-Ebene mit der Galaktischen Äquatorebene zusammenfallen, die wir als die Symmetrieebene des Systems voraussetzen. (Eine Symmetrie um die zur Galaktischen Ebene nunmehr senkrechte Z-Achse setzen wir dagegen zunächst nicht voraus.) Unter dieser Annahme ist der Mittelwert der zur Galaktischen Ebene senkrechten Geschwindigkeitskomponenten der Sterne $\bar{w} = 0$; setzen wir noch voraus, daß $\bar{u}$ und $\bar{v}$ von der Koordinate z nicht abhängen, dann ergibt sich aus (80), daß

$$C = F = G = 0 \tag{95}$$

ist.

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir wieder zu unseren Formeln für die drei Geschwindigkeitskomponenten $\bar{v}_\varrho$, $\bar{v}_{T\lambda}$, $\bar{v}_{T\beta}$ zurück, in denen wir, um sie dem hier betrachteten Falle eines Sternsystems mit einer Symmetrieebene anzupassen, $C = F = G = 0$, in Übereinstimmung mit (95) zu setzen haben. Wenn wir nach dieser Vereinfachung in die Formeln (77) (oder (79)), (90) und (91) mittelst (78), (80) und (88) die Koeffizienten A, B, H und die Koordinaten, λ und β, (die jetzt wirklich die *galaktische* Länge und die *galaktische* Breite bedeuten), einführen, erhalten wir

$$\bar{v}_\varrho \;= \varrho \cos^2\beta\,[\tfrac{1}{2}(A+B) + \tfrac{1}{2}(A-B)\cos 2\lambda + H\sin 2\lambda] \tag{96}$$

$$\bar{v}_{T_\lambda} = \varrho \cos\beta\,[\omega_s + H\cos 2\lambda - \tfrac{1}{2}(A-B)\sin 2\lambda] \tag{97}$$

$$\bar{v}_{T_\beta} = -\,\varrho \cos\beta \sin\beta\,[\tfrac{1}{2}(A+B) + \tfrac{1}{2}(A-B)\cos 2\lambda + H\sin 2\lambda]\,. \tag{98}$$

Formeln (96)—(98) zeigen uns unter anderem, wie die zunächst nur für Sterne in der galaktischen Ebene abgeleiteten OORTschen Formeln (30) zu ergänzen sind, wenn wir sie auch auf Sterne anwenden wollen, deren galaktische Breite nicht vernachlässigt werden darf: die OORTsche Formel für die Radialgeschwindigkeiten ist in diesem Falle durch den Faktor $\cos^2\beta$ zu erweitern, die Formel für die Transversalgeschwindigkeit parallel zur galaktischen Ebene mit dem Faktor $\cos\beta$.

Wir wollen nun bei der weiteren Diskussion, an Stelle der Cartesischen Koordinaten, Zylinderkoordinaten benutzen, die wir durch die Beziehungen

$$x = \bar{\omega}\cos\vartheta\;; \quad y = \bar{\omega}\sin\vartheta\;; \quad \bar{\omega}^2 = x^2 + y^2\;; \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{y}{x} \tag{99}$$

definieren; dann werden die neuen Geschwindigkeitskomponenten $\bar{\Pi}$, $\bar{\Theta}$ (s. Abb. 3) mit den Cartesischen Komponenten $\bar{v}, \bar{w}$ durch die Beziehungen

$$u = \Pi\cos\vartheta - \Theta\sin\vartheta\;; \quad v = \Pi\sin\vartheta + \Theta\cos\vartheta \tag{100}$$

zusammenhängen. Dabei wollen wir die Winkel ϑ von der Verlängerung der Verbindungsgeraden zwischen 0 und der Sonne (in positiver Richtung) zählen, d. h. wir lassen die X-Achse unseres Inertialsystems durch die Sonne gehen. Durch partielle Differentiation der beiden letzten Ausdrücke (99) nach x und y erhalten wir, unter Benutzung der beiden ersten Formeln, sofort

$$\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial x} = \cos\vartheta\;; \quad \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y} = \sin\vartheta\;; \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial x} = -\frac{\sin\vartheta}{\bar{\omega}}\;; \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial y} = \frac{\cos\vartheta}{\bar{\omega}}\,. \tag{101}$$

Nun differentiieren wir den ersten der Ausdrücke (100) partiell nach x und erhalten, unter Berücksichtigung von (101),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \bar\omega}\frac{\partial \bar\omega}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right]\cos\vartheta - \Pi\sin\vartheta\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x} - \sin\vartheta\frac{\partial\Theta}{\partial x} - \Theta\cos\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial \Pi}{\partial \bar\omega}\cos^2\vartheta - \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\bar\omega} + \Pi\frac{\sin^2\vartheta}{\bar\omega} - \sin\vartheta\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \Theta\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\bar\omega}\,.$$

Um nun den uns interessierenden Wert von $\frac{\partial u}{\partial x}$ im Punkte x_0, y_0, z_0, oder $\xi = \eta = \zeta = 0$ (an der Stelle der Sonne) zu erhalten, müssen wir in dem obenstehenden Ausdrucke $\bar\omega = \bar\omega_0$, $\vartheta = 0$ setzen, wodurch sich

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \bar\omega}\right)_0$$

und in ganz ähnlicher Weise

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 &= \frac{1}{\bar\omega_0}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta}\right)_0 - \frac{\Theta_0}{\bar\omega_0}\\
\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 &= \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \bar\omega}\right)_0 \qquad\qquad (102)\\
\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 &= \frac{1}{\bar\omega_0}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta}\right)_0 + \frac{\Pi_0}{\bar\omega_0}
\end{aligned}$$

ergibt.

Rechnen wir die in Formeln (96) — (98) auftretenden Größen $(A+B)$, $(A-B)$, H und ω mit Hilfe der Beziehungen (80), (94), (102) auf Zylinderkoordinaten um, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(A+B) &= \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \bar\Pi}{\partial \bar\omega}\right)_0 + \left(\frac{\bar\Pi}{\bar\omega}\right)_0 + \frac{1}{\bar\omega_0}\left(\frac{\partial \bar\Theta}{\partial \vartheta}\right)_0\right]\\
\tfrac{1}{2}(A-B) &= \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \bar\Pi}{\partial \bar\omega}\right)_0 - \left(\frac{\bar\Pi}{\bar\omega}\right)_0 - \frac{1}{\bar\omega_0}\left(\frac{\partial \bar\Theta}{\partial \vartheta}\right)_0\right] \qquad (103)\\
H &= \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \bar\Theta}{\partial \bar\omega}\right)_0 - \left(\frac{\bar\Theta}{\bar\omega}\right)_0 + \frac{1}{\bar\omega_0}\left(\frac{\partial \bar\Pi}{\partial \vartheta}\right)_0\right]\\
\omega_3 &= \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \bar\Theta}{\partial \bar\omega}\right)_0 + \left(\frac{\bar\Theta}{\bar\omega}\right)_0 - \frac{1}{\bar\omega_0}\left(\frac{\partial \bar\Pi}{\partial \vartheta}\right)_0\right]\,.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun zwei Grenzfälle betrachten, die von unseren Formeln (96) bis (98) erfaßt werden:

1. Reine galaktische Rotation; in diesem Falle ist $\bar\Pi = 0$ zu setzen, und $\bar\Theta$ muß unabhängig von der Winkelkoordinate ϑ sein. Dann ist

$$\tfrac{1}{2}(A+B) = 0\,;\quad \tfrac{1}{2}(A-B) = 0\,;$$

$$H = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar\Theta}{\partial \bar\omega} - \frac{\bar\Theta}{\bar\omega}\right)_0;\quad \omega_3 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar\Theta}{\partial \bar\omega} + \frac{\bar\Theta}{\bar\omega}\right)_0\,,$$

und die Formeln (96) und (97) gehen über in

$$\bar{v}_\varrho = \varrho\, \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\omega}} - \frac{\bar{\Theta}}{\bar{\omega}}\right)_0 \cos^2\beta \sin 2\lambda \tag{96'}$$

$$\bar{v}_{T_\lambda} = \varrho \cos\beta\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\bar{\Theta}}{\bar{\omega}}\right)_0 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{\omega}} - \frac{\bar{\Theta}}{\bar{\omega}}\right)_0 \cos 2\lambda\right], \tag{97'}$$

also für $\beta = 0$ in die OORTschen «Rotationsformeln» (30), (31).

2. Reine galaktische Dilatation parallel zur Milchstraßenebene; hier muß $\bar{\Theta} = 0$ gesetzt werden, während $\bar{\Pi}$ von der Winkelkoordinate ϑ unabhängig ist. Dann haben wir

$$\tfrac{1}{2}(A+B) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\bar{\Pi}}{\bar{\omega}}\right)_0; \quad \tfrac{1}{2}(A-B) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \bar{\omega}} - \frac{\bar{\Pi}}{\bar{\omega}}\right)_0;$$

$$H = 0; \quad \omega_3 = 0,$$

und die Formeln (96) und (97) nehmen die Form an

$$\bar{v}_\varrho = \varrho \cos^2\beta\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\bar{\Pi}}{\bar{\omega}}\right)_0 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \bar{\omega}} - \frac{\bar{\Pi}}{\bar{\omega}}\right)_0 \cos 2\lambda\right] \tag{96''}$$

$$\bar{v}_{T\lambda} = -\varrho\, \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \bar{\omega}} - \frac{\bar{\Pi}}{\bar{\omega}}\right) \cos\beta \sin 2\lambda\,. \tag{97''}$$

Wir bemerken, daß wenn wir in diesen Formeln λ durch $\lambda' + \frac{\pi}{4}$ ersetzen, $\cos 2\lambda$ und $\sin 2\lambda$ in $\sin 2\lambda'$ und $\cos 2\lambda'$ übergehen, so daß, wenn uns die galaktische Länge des galaktischen Zentrums (die bei unserer Achsenorientierung hier $\lambda = \pi$ ist) von vornherein nicht bekannt wäre, wir auf Grund der Wellenglieder allein nicht einmal zwischen galaktischer Rotation und galaktischer Dilatation unterscheiden könnten. Wir sehen aber, daß ein «konstanter», d. h. von der galaktischen Länge unabhängiger Term in den Eigenbewegungen (Transversalkomponente) bei reiner Dilatation nicht auftreten kann, und ebenso ist das Vorkommen eines «konstanten» Terms in den Radialgeschwindigkeiten mit einer reinen Rotation unverträglich. Wir können daher mit Sicherheit behaupten, daß bei den Sterngruppen, bei denen ein «konstanter» K-Effekt von einem so großen Betrage festgestellt worden ist, daß er nicht durch irgendwelche rein physikalische Ursachen, wie relativistische Rotverschiebung oder abnormes Verhalten der benutzten Spektrallinien usw., erklärt werden kann, außer der galaktischen Rotationsbewegung notwendig noch irgend ein anderes Bewegungsphänomen im Spiele sein muß, durch das die Divergenz des Strömungsvektors dieser Sterngruppe einen von Null verschiedenen (positiven oder negativen) Wert erhält.

Auf Grund der Strömungstheorie haben wir bis jetzt nicht nur das empirisch festgestellte Verhalten der mittleren Radialgeschwindigkeiten und der paral-

lel zur Milchstraßenebene liegenden Eigenbewegungen, also die OORTschen «Rotationskonstanten» A und B, ohne jede nähere Annahme über den Bewegungszustand des Gesamtsystems, in sehr befriedigender Weise deuten können, sondern auch sogar für den in der Rotationstheorie keinen Platz findenden K-Effekt eine zwanglose Erklärung als Auswirkung einer hinzukommenden «Galaktischen Dilatation» erhalten. Es läßt sich aber aus dieser Theorie noch etwas mehr herausholen. Nehmen wir an, daß die Richtung nach dem galaktischen Zentrum uns aus irgendwelchen, von den Bewegungserscheinungen unabhängigen Beobachtungstatsachen (wie z. B. der räumlichen Verteilung der Kugelhaufen) bekannt geworden ist; wir haben oben angenommen, daß sie dem Längenwerte $\lambda = \pi$ entspricht. Wenn nun der wahre Bewegungszustand des Systems in der Umgebung der Sonne weder als reine Rotation, noch als reine Dilatation gedeutet werden kann, sondern ein Gemisch beider Erscheinungen darstellt (was, da wir ausdrücklich auch zeitabhängige, also nicht-stationäre Zustände in den Kreis unserer Betrachtungen hereingezogen haben, durchaus möglich ist), dann werden, wie sich leicht zeigen läßt, die Maxima und Minima der Doppelwellen in bezug auf die Richtung nach dem galaktischen Zentrum nicht mehr ganz so orientiert sein, wie in den beiden oben betrachteten Grenzfällen. Führen wir nämlich in die Formeln (96) und (97) durch die Substitution (85) H' und λ_0 ein, und bezeichnen das von λ unabhängige Glied $\frac{1}{2}(A+B)$ mit K', so nehmen sie die Gestalt an

$$\bar{v}_\varrho = \varrho \cos^2\beta\,[K' + H' \sin 2\,(\lambda - \lambda_0)] \qquad (96''')$$

$$\bar{v}_{T\lambda} = \varrho \cos\beta\,[\omega_3 + H' \cos 2\,(\lambda - \lambda_0)]\ . \qquad (97''')$$

In diesem allgemeineren Falle bleibt also der Gang in den mittleren Radialgeschwindigkeiten und Eigenbewegungen in galaktischer Länge qualitativ genau derselbe, wie in den beiden Grenzfällen reiner galaktischer Rotation und reiner galaktischer Dilatation, die Vorzugsrichtung, die die Lagen der Maxima und Minima der Doppelwellen bestimmt, und die früher in die Richtung $\lambda = 0, \pi$ fiel, erscheint jetzt aber um den Winkel λ_0, in die Richtung $\lambda = \lambda_0,\ \lambda_0 + \pi$ verdreht. Nun haben wir auf S. 130 gesehen, daß die empirische Bestimmung der Richtung nach dem Rotationszentrum bei einigen Sterngruppen (den «gewöhnlichen», nicht besonders entfernten Sternen), galaktische Längen für diese Richtung ergeben haben, die ziemlich merklich von dem SHAPLEYschen Werte $\Lambda_0 = 326°$ abweichen und sich sogar mitunter dem Werte 347° nähern.

Diese Abweichungen, die vom Standpunkte der Theorie der galaktischen Rotation wieder nur als Störungen des idealen Zustandes zu erklären wären, erweisen sich hier also einfach als die zu erwartenden Folgen eines allgemei-

neren Bewegungszustandes, bei dem außer einer Rotation auch noch eine Expansion oder eine Kontraktion des unserer Beobachtung zugänglichen, unsere nächste Umgebung bildenden Teils des Sternsystems stattfindet.

Durch Ausgleichung der in der Form (96'''), (97''') angesetzten Bedingungsgleichungen für die Radialgeschwindigkeiten v_ϱ und die Eigenbewegungen $\frac{v_{T\lambda}}{k\varrho}$ und Bildung des Verhältnisses der in km/sec und in Bogensekunden/Jahr erhaltenen Amplituden der Doppelwellen (die beide gleich $\varrho H'$ sein müssen), kann die mittlere Entfernung der Sterne erhalten werden, womit sich dann auch alle in diese Gleichungen eingehenden Konstanten K, H', ω_s und λ_0 bestimmen lassen. Mit diesen Konstanten können aber dann auch die galaktische Rotationsgeschwindigkeit, die galaktische Expansionsgeschwindigkeit sowie ihre Ableitungen nach dem Radiusvektor berechnet werden, wenn wir noch die vereinfachende Annahme machen (die wir bis jetzt noch nicht eingeführt hatten), daß das System *axiale Symmetrie* besitzt. In diesem Falle müssen nämlich in den Formeln (103) alle Derivierten nach ϑ gleich Null werden, und wir erhalten, indem wir aus den so vereinfachten Ausdrücken die Größen $\frac{\overline{\Theta}}{\overline{\omega}} = \omega$ (die Winkelgeschwindigkeit der Rotation in der Entfernung $\overline{\omega}$ von der Rotationsachse), $\frac{\overline{\Pi}}{\overline{\omega}}$, $\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial \overline{\omega}}$, $\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial \overline{\omega}}$, unter Berücksichtigung von (85) und (87) ausrechnen

$$\begin{aligned} \omega = \frac{\overline{\Theta}}{\overline{\omega}} &= \omega_s - H' \cos 2\lambda_0 \; ; & \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial \overline{\omega}} &= \omega_s + H' \cos 2\lambda_0 \\ \frac{\overline{\Pi}}{\overline{\omega}} &= K' + H' \sin 2\lambda_0 \; ; & \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial \overline{\omega}} &= K' - H' \sin 2\lambda_0 \, . \end{aligned} \tag{104}$$

(Natürlich gelten diese Formeln auch für den allgemeineren Fall, in dem keine axiale Symmetrie besteht, wenn man auf den linken Seiten $\frac{\overline{\Theta}}{\overline{\omega}}$ und $\frac{\overline{\Pi}}{\overline{\omega}}$ durch $\left(\frac{\overline{\Theta}}{\overline{\omega}} - \frac{1}{\overline{\omega}}\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial \vartheta}\right)$ bzw. $\left(\frac{\overline{\Pi}}{\overline{\omega}} + \frac{1}{\overline{\omega}}\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial \vartheta}\right)$ ersetzt.) Das zur empirischen Bestimmung der vier auf den linken Seiten stehenden Größen erforderliche Beobachtungsmaterial an Radialgeschwindigkeiten und Eigenbewegungen, das sich auf Sterne in einem hinreichend ausgedehnten Entfernungsbereiche beziehen und gleichmäßig über alle galaktischen Längen verteilt sein müßte, ist heute wohl noch nicht vorhanden[26]), so daß die Formeln (104) zunächst nur eine theore-

[26]) Vgl. den von K. Pilowski (Astronomische Nachrichten Bd. 257, S. 225, 1935) unternommenen Versuch einer praktischen Auswertung dieser Formeln an Hand des von J. S. Plaskett und J. A. Pearce (M. N. *94*, 679, 1934) für die *O*- und *B*-Sterne zusammengebrachten Materials, und die von W. M. Smart (M. N. *96*, 568, 1936, und Stellar Dynamics, S. 413) dazu gemachten Bemerkungen.

tische Bedeutung haben. Aber auch letztere verdient unsere Aufmerksamkeit, weil sich aus diesen Formeln nicht uninteressante Schlüsse ziehen lassen, die uns die unserem Problem innewohnenden Vieldeutigkeiten in lehrreicher Weise vor Augen führen. Nehmen wir z. B. an, die Ausgleichung des experimentellen Materials hätte für die Konstante λ_0 den Wert $\lambda_0 = 0$ ergeben, wie das bei einigen Sterngruppen, wie wir gesehen haben, auch der Fall ist. Wenn wir nun aus diesem Umstande den Schluß ziehen würden, daß wir es bei diesen Sternen mit einer reinen galaktischen Rotation zu tun haben, so würden wir uns in einem Irrtum befinden: reine Rotation liegt nämlich nur in dem Falle vor, wenn außer $\lambda_0 = 0$ auch noch der konstante K-Effekt verschwindet, also in (104) auch $K' = 0$ ist, denn nur in diesem Falle ergeben unsere Ausdrücke $\overline{\Pi} = 0$. Hat aber K' einen von Null verschiedenen Wert, dann bedeutet das Ergebnis $\lambda_0 = 0$ nur, daß in dem in Frage kommenden Raumgebiete die Beziehung $\overline{\Pi} =$ const. $\overline{\varpi}$ besteht. Andererseits kann aber sogar bei verschwindendem K-Effekte ($K' = 0$) noch eine (positive oder negative) «Dilatation» vorhanden sein, wenn nur $H' \sin 2\lambda_0$ nicht gleich Null ist; in diesem Falle sagen unsere Formeln nämlich nur aus, daß in dem erwähnten Gebiete $\overline{\Pi}$ proportional zu $\overline{\varpi}^{-1}$ ist. (In diesem Falle findet eine Dilatation in der ϑ-Richtung und eine Kontraktion in der $\overline{\varpi}$-Richtung — oder umgekehrt — statt, die sich so kompensieren, daß die Divergenz des Strömungsvektors $(\overline{u}, \overline{v})$ in dem betrachteten Gebiete gleich Null wird.)

Wie oben gezeigt worden ist, vermag die «Strömungstheorie» eine Reihe von Erscheinungen, die in der Theorie der galaktischen Rotation nur als «Störungen» oder kleine Abweichungen von dem «normalen» Zustande begreiflich gemacht werden konnten, in zwangloser Weise, als ganz allgemeine, in jedem Strömungsfelde (d. h. jedem Geschwindigkeitsfelde, dessen Komponenten $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ stetige Funktionen der Ortskoordinaten sind) auftretende Effekte erster Ordnung zu erklären. Sie ist aber in der oben dargelegten Form sogar zu allgemein, da unser Wissen um die Beschaffenheit des Bewegungszustandes unseres Galaktischen Systems jetzt schon etwas über die der Strömungstheorie zugrunde liegenden einfachsten Voraussetzungen hinaus geht. Ihre Unzulänglichkeiten liegen hauptsächlich in den beiden nachfolgenden Umständen: 1. da sich diese Theorie nur mit dem Verhalten der *mittleren* Geschwindigkeit der Sterne an jeder Stelle (die ja allein als Strömung aufgefaßt werden kann) beschäftigt, vermag sie nichts über die Streuungen der einzelnen Geschwindigkeiten um diese Mittelwerte auszusagen, so daß z. B. für die äußerst bemerkenswerte ellipsoidische Verteilung dieser «Restgeschwindigkeiten» eine außerhalb des Rahmens der Strömungstheorie liegende Deutung gesucht werden muß (Geschwindigkeitsverteilung in einem stationären achsensymmetrischen System usw.); 2. als rein differentielle ki-

nematische Theorie der Sternbewegungen, kann sie nur den Anspruch erheben, diese Bewegungen in dem die Sonne unmittelbar umgebenden Teile des Galaktischen Systems zu erklären, und muß von vornherein auf jeden Versuch eines Schlusses vom Teil aufs Ganze, also auf jede Aussage über den allgemeinen Bewegungszustand des Galaktischen Systems verzichten. Wir haben also bei der theoretischen Behandlung der im Galaktischen System empirisch festgestellten Bewegungserscheinungen zwei gewissermaßen entgegengesetzte Standpunkte eingenommen: 1. daß uns die dynamische Beschaffenheit dieses Systems in seinen Grundzügen vollständig bekannt ist — nämlich, daß wir es bei ihm mit einem in einem stationären Zustande befindlichen achsensymmetrischen Sternsystem zu tun haben – die Theorie der galaktischen Rotation, und 2. daß wir über die dynamischen Verhältnisse in diesem System überhaupt nichts wissen, die in ihm wahrgenommenen Bewegungserscheinungen aber als die differentiellen Effekte erster Ordnung deuten können, die ein mit einer strömenden Flüssigkeit mitgeführter Beobachter in seiner Umgebung immer feststellen muß, gleichgültig ob die Strömung stationär ist oder sich mit der Zeit langsam ändert, und ganz unabhängig von den wirkenden Kräften sowie dem Bewegungszustande in den ihm unzugänglichen Teilen des Systems. Dies ist der Standpunkt der rein kinematischen Strömungstheorie.

Wie wir gesehen haben, scheint die Wahrheit in der Mitte zu liegen. Die Theorie der galaktischen Rotation stellt wahrscheinlich eine zu weitgehende Idealisierung der Verhältnisse dar, was in den oben erwähnten Unstimmigkeiten zwischen Theorie und Beobachtung zum Ausdruck kommt, die allerdings durch die Annahme *schwacher* Abweichungen von dem idealen Zustande einigermaßen verständlich gemacht werden können. Die von der Strömungstheorie gegebenen Erklärungen der Bewegungsphänomene sind zweifellos richtig, denn sie stellen Verallgemeinerungen der auch von der Rotationstheorie und jeder speziellen Theorie überhaupt gegebenen Deutungen dieser Phänomene dar; doch sind uns auch noch andere Phänomene bekannt, die sich nicht auf das räumliche Verhalten der Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten in einem beschränkten Raumgebiete beziehen und daher zu ihrer Erklärung ein näheres Eingehen auf die dynamischen Verhältnisse des Systems erfordern, das außerhalb des Bereiches der rein kinematischen, differentiellen Strömungstheorie liegt. Ihr Wert für uns ist daher hauptsächlich in der Erkenntnis enthalten, daß eine teilweise Aufgabe der Grundannahmen der Rotationstheorie keineswegs einen Verzicht auf eine Deutung aller derjenigen Phänomene bedeutet, die im Rahmen dieser Theorie eine so eindrucksvolle und einleuchtende Erklärung gefunden hatten. Die Theorie der galaktischen Rotation stellt eine durchaus mögliche, und jedenfalls die zurzeit am ausführlichsten entwickelte Theorie der Bewegungserscheinungen

im Galaktischen System dar, keineswegs aber die einzige zulässige Erklärung. Es hat denn auch nicht an Versuchen gefehlt, von wesentlich anderen Grundannahmen ausgehend, als es die Rotationstheorie tut, zu einem mit der Erfahrung übereinstimmenden Bilde der besagten Bewegungserscheinungen zu gelangen, doch würde ein ausführliches Eingehen auf diese Theorien im gegenwärtigen Zeitpunkte kaum einen Zweck haben, da das zur Verfügung stehende Beobachtungsmaterial gegenwärtig noch keineswegs ausreicht, um eine klare Entscheidung zwischen den sich gegenüberstehenden Meinungen herbeizuführen. Es sei nur in diesem Zusammenhange auf die etwa gleichzeitig mit der Entstehung der Rotationstheorie von E. v. d. PAHLEN und E. FREUNDLICH[27]) vorgeschlagene Erklärung hingewiesen, die von der Vorstellung ausgeht, daß die in der Umgebung der Sonne befindlichen Sterne um das Galaktische Zentrum nicht Kreisbahnen, sondern langgestreckte Ellipsen beschreiben; die in den Geschwindigkeiten beobachteten Doppelwellen lassen sich auf Grund dieser Annahme auch weitgehend erklären, ebenso wie die asymmetrische Verteilung der Apices der «Schnelläufer», die hier auch als zurückbleibende Sterne, also eigentlich als «Langsamläufer» erscheinen. Ferner ist auch die Erklärung eines konstanten K-Effektes auf dieser Grundlage möglich, da ja bei der Bewegung einer Sterngruppe in benachbarten Ellipsenbahnen, je nachdem sich diese Sterne ihrem Perizentrum oder ihrem Apozentrum nähern, eine Expansion oder eine Kompression stattfinden muß. Wegen aller näheren Einzelheiten muß auf die Originalarbeiten verwiesen werden. Es darf aber hier noch der Umstand hervorgehoben werden, daß der prinzipielle Unterschied dieser Auffassung von der Rotationstheorie nicht allzu groß ist; auch bei einer Bewegung der meisten Systemsterne in langgestreckten Ellipsen um den galaktischen Mittelpunkt kann, wenn diese überwiegend in einem Sinne beschrieben werden, der Bewegungszustand des Systems als eine Art Rotation aufgefaßt werden, allerdings mit einer Rotationsgeschwindigkeit, die an jeder Stelle nicht mehr der für diese geltenden Kreisgeschwindigkeit entspricht, und zu der noch eine vom Mittelpunktsabstande abhängige Expansionsgeschwindigkeit hinzutritt. Ein solcher Bewegungszustand kann, nach den allgemeinen oben abgeleiteten Sätzen, allerdings nicht einem streng stationären Zustande entsprechen, was an sich keinen Nachteil bedeuten würde, da wir ja schon wissen, daß sich das Galaktische System im strengen Sinne sicher nicht in einem solchen Zustande befindet. Die Annahme, daß die meisten Sterne, deren Geschwindigkeiten uns bekannt sind, Mitglieder eines sehr losen lokalen Sternhaufens (oder einer Sternwolke) sind, die um das entfernte galaktische Zentrum im Kraftfelde

---

[27]) E. v. d. PAHLEN und E. FREUNDLICH, Publ. des Astrophys. Observat. Potsdam, Nr. 86, Bd. 26, Heft 3 (1928) und Zeitschrift f. Astrophysik, Bd. 1, S. 200 (1930).

des letzteren eine langgestreckte Bahnellipse beschreibt, würde die wesentlichen Züge des empirisch festgestellten Bewegungszustandes auch weitgehend erklären können und erscheint angesichts der sehr großen Unsicherheit der Bestimmung der Größe und Richtung der Sonnengeschwindigkeit in bezug auf die Kugelhaufen keineswegs als ausgeschlossen. Zur Entscheidung dieser Frage reicht aber das uns heute zur Verfügung stehende Beobachtungsmaterial nicht aus, weshalb eine eingehendere Diskussion der Verhältnisse von diesem Standpunkte aus zunächst müßig sein würde. Bis zur Erlangung der eine klare Entscheidung ermöglichenden empirischen Daten kann nur einer von J. H. Oort in einer seiner ersten Arbeiten über diese Fragen gemachten Bemerkung zugestimmt werden, daß wenn der Bewegungszustand des Milchstraßensystems keine Rotation sein sollte, «er etwas ist, was mit einer Rotation eine große Ähnlichkeit haben muß».

IV. KAPITEL

DIE AUSSERGALAKTISCHEN STERNSYSTEME

Seitdem uns durch die Untersuchungen von H. D. CURTIS, K. LUNDMARK, H. SHAPLEY, E. HUBBLE u. a. die wahre Natur der früher schlechtweg als «Spiralnebel» bezeichneten Gebilde, die heute nach einem Vorschlage von Lundmark «Anagalaktische» oder «Außergalaktische Nebel» genannt werden, bekannt geworden ist, steht uns eine reiche Auswahl von Formen zur Verfügung, die ein Sternsystem annehmen kann und deren Deutung der dynamischen Theorie dieser Gebilde ein neues weites Betätigungsfeld eröffnet. Die Erkenntnis, daß die Nebel dieser Klasse, von denen viele Millionen vorhanden zu sein scheinen, *fremde Milchstraßen* oder außerhalb unseres Galaktischen Systems liegende Galaxien — also mit ihm gleichberechtigte «Weltinseln» — darstellen, ist nur durch ein mühsames Studium der mit den allergrößten Teleskopen (hauptsächlich mit den Reflektoren von 60 und 100 Zoll Öffnung von Mount Wilson) erhaltenen photographischen Aufnahmen dieser Gebilde, deren Entfernungen von uns nach Millionen von Parsec zählen, gewonnen worden und fußt auf der heute als gesichert anzusehenden Feststellung, daß die kleinsten in den großen Spiralnebeln noch erkennbaren hellen «Verdichtungen» wirkliche Sterne darstellen. Es ist an dieser Stelle natürlich völlig unmöglich, auch nur ein genähertes Bild von der im Laufe der letzten 20 Jahre zu Tage geförderten Fülle von Tatsachen zu geben, die sich auf diese das Interesse der Astronomen heute beherrschenden Objekte, in gewissem Sinne die wahren Bausteine des Universums, beziehen, weshalb wir uns hier mit einer ganz kurzen Zusammenstellung der für unsere Zwecke in erster Linie in Betracht kommenden empirischen Daten begnügen und wegen alles weiteren den Leser an das ausgezeichnete Buch von E. HUBBLE, «The Realm of the Nebulae»[1]) verweisen müssen.

Die empirischen Tatsachen

Die auf den ersten Blick außerordentliche Vielfältigkeit der bei den Außergalaktischen Nebeln auftretenden Formen läßt sich bei genauerem Zusehen in eine erstaunlich kleine Anzahl von Klassen oder Typen zusammenfassen, wobei auch diese Klassen in eine stetige Sequenz angeordnet werden können,

---

[1]) EDWIN HUBBLE, Das Reich der Nebel, Bd. 91 der Sammlung «Die Wissenschaft» FR. VIEWEG & Sohn, Braunschweig. Übersetzt von K. O. KIEPENHEUER. (1938).

die wahrscheinlich mit der Entwicklungsgeschichte eines Sternsystems in irgend einer Weise in Beziehung steht, wenn es auch entschieden noch verfrüht wäre, diese Sequenz jetzt schon als den «Stammbaum» der Sternsysteme anzusprechen. Die heute allgemeingebräuchliche Klassifizierung der Außergalaktischen Nebel, die über 97% aller Objekte dieser Art erfaßt und nur 2,5% als «unregelmäßige» Nebel in einer besonderen Klasse unterbringen muß, ist aus der Untersuchung von einigen hundert Nebeln gewonnen worden, deren Bilder auf den photographischen Aufnahmen groß genug sind, um strukturelle Eigentümlichkeiten der Gebilde erkennen zu lassen. Die vielen tausende von schwachen und schwächsten Nebeln, die die mit den großen Reflektoren bei längerer Expositionszeit erhaltenen Aufnahmen von Sterngegenden übersäen, sind meistens für Klassifikationszwecke nicht zu gebrauchen, da sich ihre Bilder nur als diejenigen von nicht-sternförmigen Objekten erkennen lassen und höchstens noch eine Abschätzung ihrer scheinbaren Totalhelligkeit gestatten; da aber die größeren, leichter zu untersuchenden Objekte sich, wie wir gesehen haben, beinahe restlos in das System einfügen lassen, ist es wohl plausibel anzunehmen, daß auch bei den kleinen Nebeln im wesentlichen nur die uns bekannten Typen auftreten würden.

Die regelmäßigen Nebel zeichnen sich alle durch die Eigenschaft aus, daß sich bei ihnen schon auf den ersten Blick eine ausgesprochene Rotationssymmetrie um einen zentralen Kern feststellen läßt, wenn auch ihre Formen im übrigen sehr stark voneinander abweichen können. Diese Formen zerfallen wiederum in zwei große Gruppen: die elliptischen und die spiralförmigen, wobei von der einen zur anderen ein stetiger Übergang zu führen scheint, so daß man den Eindruck erhält, als ob sie zusammen nur zwei Teile einer einzigen größeren Folge von Formen wären. Es ist üblich, den Anfang der Klassifizierung bei den kompaktesten Nebeln zu legen, die sich auf den Himmel als kreisförmige Scheiben projizieren und von denen (wenigstens statistisch) angenommen werden kann, daß sie nahezu kugelförmigen Gebilden entsprechen. Diese Nebel, die den Ausgangspunkt der Serie der elliptischen Nebel bilden, werden mit dem Symbol $E0$ bezeichnet. Bei zunehmender Abweichung von der kreisförmigen Gestalt erhalten die weiteren elliptischen Nebel die Bezeichnungen $E1$, $E2$, $E3$, usw. bis zu $E7$, die einem «linsenförmigen» Nebel entspricht, der durch eine Ellipse dargestellt werden kann, deren beide Achsen etwa im Verhältnisse 3 : 1 zueinander stehen. Eine größere Abplattung scheint bei elliptischen Nebeln nicht vorzukommen, sondern es setzen an dieser Stelle der Klassifikation die spiralförmigen Gebilde ein.

Die Spiralnebel bilden keine einfache Folge, sondern zerfallen in zwei getrennte, zueinander analog verlaufende Folgen, so daß die Stelle, an der sie sich der Folge der elliptischen Nebel anschließen, einen Gabelungspunkt darstellt. Diese beiden Folgen unterscheiden sich voneinander dadurch, daß in

der einen die Spiralarme unmittelbar aus dem Kerne heraustreten, während sie bei der anderen aus den Enden eines den Kern durchsetzenden Querbalkens herauszuwachsen scheinen. Die Nebel der ersten Gruppe werden normale Spiralnebel genannt und mit dem Symbol *S* bezeichnet; die Nebel der zweiten Gruppe, die die Bezeichnung *SB* erhalten, pflegt man auf englisch «barred spirals» zu nennen. In der deutschen Literatur ist für diese Nebel die Bezeichnung «geschlossene Spiralen» gebräuchlich, die vielleicht mit Vorteil durch die Bezeichnung «Balkenspiralen» ersetzt werden könnte. Auf beiden Ästen der Gabelung werden je drei mit den Buchstaben *a, b, c* bezeichnete Klassen unterschieden, die einer immer zunehmenden Öffnung der Spiralwindungen entsprechen. Die *SB*-Spiralen der ersten dieser Klassen sind oft schwer als Spiralnebel zu erkennen, da ihre Äste sich zusammenzuschließen scheinen, so daß das Gebilde eine Ähnlichkeit mit dem griechischen Buchstaben Θ erhält (daher der Name: geschlossene Spiralen); bei den *SBb*- und den *SBc*-Spiralen sind dagegen die Windungen schon ganz deutlich zu erkennen. Die Klassifizierung der außergalaktischen Nebel ist auf der nebenstehenden, dem oben erwähnten Buche von E. HUBBLE entnommenen Abb. 12 schematisch dargestellt. Bezüglich des in diesem Schema mit *S0*

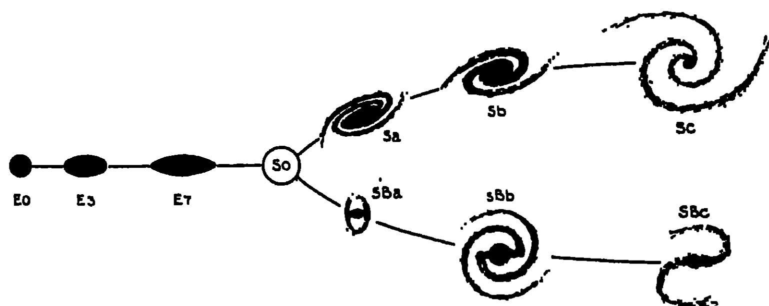


Abb. 12
Klassifikation der außergalaktischen Nebel, nach E. Hubble.

bezeichneten Gabelungspunktes besteht noch eine gewisse Unklarheit: während nämlich der Übergang von der Klasse *E7* zu der Klasse *SBa* ein ganz stetiger ist, klafft zwischen *E7* und *Sa* eine sehr bemerkenswerte Lücke: die Spiralnebel der Klasse *Sa* zeigen immer vollentwickelte, wenn auch noch dicht gewundene Spiralarme, deren Entstehungsprozeß somit an Hand des uns heute zur Verfügung stehenden Bildermaterials nicht verfolgt werden kann. Es scheint also, daß die Entwicklung, falls man von einer solchen längs der Sequenz in Richtung von *E0* nach *Sc* und *SBc* sprechen darf, in dem zwischen *E7* und *Sa* liegenden Intervalle einen katastrophalen Verlauf an-

nimmt, und gerade dieses, wahrscheinlich sehr kurzlebige Übergangsstadium, auf dessen Existenz in dem Beobachtungsmateriale nur schwache Andeutungen enthalten sind, wird als hypothetische *S*0-Klasse eingeführt.

Außer der äußeren Gestalt, die als Hauptgrundlage für die Klassifizierung der Nebel dient, können noch verschiedene andere Eigenschaften der Nebel angeführt werden, die sich beim Fortschreiten längs der Sequenz von *E*0 bis *Sc* bzw. *SBc* stetig ändern:

1. Die Kerne sind im allgemeinen sehr klein und erscheinen meistens als Sternscheibchen; bei sehr späten (aufgelösten) Nebeln aber, die schon mehr das Aussehen von Agglomeraten von Sternwolken haben, zeigen auch die Kerne eine gewisse Ähnlichkeit mit den uns von unserem Galaktischen System her bekannten Sternhaufen.

2. Die Spektraltypen können meistens nur für die Kernbezirke bestimmt werden und gehören überwiegend der Spektralklasse *G* (Sonnentypus) an; beim Fortschreiten längs der Sequenz der Nebeltypen ändert sich auch der Spektraltypus ein wenig, in dem Sinne, daß die «späteren» Nebel einem etwas «früheren» Spektraltypus angehören. Es darf nicht übersehen werden, daß es sich hier natürlich um den mittleren Spektraltypus des integrierten Lichtes einer vermutlich sehr großen Anzahl von Sternen handelt.

3. Die Farben der Nebel zeigen, bis auf eine noch nicht aufgeklärte Abweichung bei den kugelförmigen Nebeln, einen den überwiegenden Spektraltypen entsprechenden Gang, d. h. daß die spätesten Nebel etwas bläulicher sind als die frühen.

4. Die Auflösbarkeit der Nebel in einzelne Sterne ist ebenfalls für die verschiedenen Klassen eine verschiedene: sie fängt eigentlich erst bei den an der Grenze zwischen Klassen *Sa* und *Sb* liegenden Spiralen (man pflegt sie als *Sab*-Spiralen zu bezeichnen) an und wird in den späteren Typen immer auffälliger. In den elliptischen Nebeln sind keine einzelnen Sterne sichtbar, was aber keineswegs als Beweis dafür betrachtet werden darf, daß sie nicht aus Sternen bestehen; bei den ungeheuren Entfernungen dieser Nebel sind für uns nur die allerhellsten Sterne als solche erkennbar, und dies sind die blauen Riesensterne, die scheinbar erst von der Klasse *Sab* ab in den Nebeln auftreten. Dieses späte Erscheinen von blauen Riesen würde auch mit den bezüglich der Änderung der integrierten Spektren und der Farben längs der Typensequenz gemachten Feststellungen übereinstimmen.

Die oben angeführten Tatsachen sind in der nachstehenden kleinen Tabelle zusammengestellt, in der die Spektren nach Angaben von M. Humason, die Farben nach den Bestimmungen von J. Stebbins (und zwar in Form von «hypothetischen Spektren» nach der Skala der Riesensterne) gegeben sind. In der letzten Spalte sind die Häufigkeiten des Vorkommens der verschiedenen Nebeltypen in % angegeben. Man sieht, daß auch sie einen deutlichen

Tabelle II

Nebeltypus	Spektraltypus	Farbenklasse	Häufigkeit in %
E0—E7	*G4*	*g6*	17
Sa, SBa	*G3*	*g5*	19
Sb, SBb	*G2*	*g4*	25
Sc, SBc	*F9*	*f7*	36

Gang mit der Stellung des Nebeltyps in der Sequenz zeigen, indem die «späteren» Typen im Vergleiche zu den früheren immer häufiger werden.

Von den übrigen heute bekannten Eigenschaften der Nebel soll hier nur noch eine erwähnt werden, die uns im weiteren noch zu beschäftigen haben wird: Nach den an Nebelaufnahmen ausgeführten Messungen von E. v. d. PAHLEN[2]), H. GROOT[3]), und J. H. REYNOLDS[4]), lassen sich die Spiralarme einer gewissen Anzahl von Nebeln auffallend gut durch logarithmische Spiralen approximieren. In anderen Fällen, in denen Knicke und Unterbrechungen in den Windungen vorhanden sind, kann diese Approximation nur stückweise ausgeführt werden, jedoch scheint der Form der logarithmischen Spirale eine besondere Bedeutung im Aufbau eines Spiralnebels zuzukommen. Wegen aller übrigen sonst bekanntgewordenen Eigenschaften der Spiralnebel, deren theoretische Deutung noch nicht versucht werden kann, und die aus diesem Grunde hier auch nicht näher betrachtet werden sollen, muß auf das oben zitierte Buch von E. HUBBLE, sowie auf das Kapitel 6 des Bandes V2 des Handbuchs der Astrophysik (The Nebulae, von H. D. CURTIS, 1933), das Buch von W. BECKER, Sterne und Sternsysteme (1942) und das Buch von H. SHAPLEY «Galaxies» verwiesen werden.

Während uns im Galaktischen System der Bewegungszustand wenigstens in der Umgebung der Sonne einigermaßen bekannt war, die räumliche Verteilung der Sterne dagegen noch vollständig im Dunkel lag, haben wir uns bei den außergalaktischen Nebeln bis jetzt ausschließlich mit der räumlichen Verteilung der in ihnen enthaltenen Sterne (und einigen physikalischen Eigenschaften, wie mittlere Spektren und Farben) beschäftigt und die Bewegungsverhältnisse überhaupt noch nicht berührt. In der Tat sind letztere aus begreiflichen Gründen noch sehr wenig erforscht. Wenn wir von den riesigen Radialgeschwindigkeiten dieser Objekte und der berühmten Entfernungs-Geschwindigkeitsrelation von HUBBLE absehen, die mehr das aus den Nebeln gebildete Übersystem (oder wie man heute oft zu sagen pflegt — das

---

[2]) A. N. 188, S 249 (1911).

[3]) M. N. 85, S. 535 (1924), M. N. 86, S. 140 (1926).

[4]) M. N. 85, S. 142 (1921) und S. 1014 (1925), 87, S. 112 (1926).

Weltall) als das einzelne Sternsystem charakterisieren, ist uns nur für einige Nebel bekannt, daß sie sich in einem Zustande ziemlich rascher Rotation befinden, oder richtiger, daß ihre verschiedenen Teile differentielle Dopplerverschiebungen zeigen, die auf innere Bewegungen hinweisen. die als Rotationen gedeutet werden können[5]). Die Kerngegenden scheinen hierbei mehr oder weniger wie starre Körper zu rotieren, während die äußeren Partien sich mit kleineren Geschwindigkeiten bewegen. In einigen Spiralnebeln scheint die Rotationsgeschwindigkeit in den äußersten Gebieten wieder zuzunehmen, jedoch sind alle diese Ergebnisse noch keineswegs als gesichert zu betrachten, und es ist uns nicht einmal der Drehsinn eines Spiralnebels mit Sicherheit bekannt; nach V. M. SLIPHER geht die konvexe Seite der Spiralarme voran, doch wird dieses Ergebnis von anderen Beobachtern und den Theoretikern noch vielfach bestritten. Die gemessenen Geschwindigkeiten sind von der Größenordnung von 90 – 150 km/sec, also mit den in unserem Galaktischen System festgestellten inneren Geschwindigkeiten von durchaus vergleichbarer Größenordnung. Hiermit beschließen wir unsere kurze Übersicht der auf die außergalaktischen Sternsysteme bezüglichen empirischen Tatsachen, die schon in dieser knappen Form weit über den Rahmen des heute theoretisch Deutbaren hinausgehen, und wenden uns wieder der Fortsetzung unserer dynamischen Betrachtungen zu.

Die Dynamik der außergalaktischen Sternsysteme steckt noch in ihren ersten Anfängen, wenn auch in jüngster Zeit umfangreiche mathematische Untersuchungen über die hierher gehörenden Probleme erschienen sind. In erster Linie sind hier zwei Namen zu nennen: B. LINDBLAD und S. CHANDRASEKHAR, von denen ersterer hauptsächlich die spiralförmigen Gebilde auf Grund seiner bereits oben (s. S. 129) gestreiften Theorie der durch große Dichtegefälle hervorgerufenen Instabilitäten von Kreisbewegungen zu erklären versucht hat, während letzterer eine weitläufige Theorie von stationären und nicht-stationären Sternsystemen unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen entwickelt hat, die zu einer Fülle verschiedener Möglichkeiten führt, unter denen sich auch eine Reihe von Gebilden befinden, die mit einigen uns von den außergalaktischen Nebeln her bekannten Formen eine unverkennbare Ähnlichkeit haben. Es würde an dieser Stelle nicht möglich sein, die theoretischen Betrachtungen S. CHANDRASEKHARS, die in zwei Abhandlungen mit etwa 2000 Formeln niedergelegt sind[6]), trotz ihres großen wissenschaftlichen Wertes, wiederzugeben, zumal ein großer Teil seiner Ergebnisse zunächst wohl noch keine direkten Beziehungen zu empirisch belegten Erscheinungen hat, und eine vollständige Schilderung aller

---

[5]) V. M. SLIPHER, Lick. Obs. Bull. *2*, 65 (1914) und Pop. Astr. *29*, 272 (1921). PEASE, Mt. Wilson Comm. Nr. 32 (1916). BABCOCK, PASP. *50*, 174 (1938).

[6]) Ap. J. *90*, 1 – 154, (1939), *92*, 441 – 642, (1940).

von ihm entdeckten und behandelten Spezialfälle weit über den Rahmen einer Einleitung in die Dynamik der Sternsysteme führen würde. Andererseits erscheint es aber kaum möglich, die heute bereits vorliegenden vielversprechenden Erklärungsversuche des dynamischen Zustandekommens so merkwürdiger Gebilde, wie ein spiralförmiges Sternsystem, in einigermaßen befriedigender Weise zu schildern, ohne auf die prinzipiellen Grundlagen der Theorie der nicht-stationären Zustände einzugehen. Wir wollen daher im nachfolgenden zunächst die allgemeinen Grundlagen dieser Theorie, so wie sie von S. CHANDRASEKHAR in seinen soeben erwähnten Untersuchungen gegeben worden sind, kennen lernen, und sie dann auf die Deutung zweier der in unserer Zusammenstellung der auf die außergalaktischen Nebel bezüglichen empirischen Daten angeführten Erscheinungen anwenden, nämlich 1. das Auftreten eines augenscheinlich dynamisch ausgezeichneten Instabilitätspunktes *S0* in der Sequenz der Nebelformen, von dem wir vermuten dürfen, daß er gewissermaßen den Grenzpunkt zwischen der Sequenz stationärer, oder quasi-stationärer, ellipsoidischer Formen und den auf sie folgenden «Auflösungsformen» bildet, und 2. das allgemeine «Spiralen-Phänomen».

Grundlagen der allgemeinen Theorie der stationären und nicht-stationären Sternsysteme mit inneren Bewegungen

Wir knüpfen an die von uns am Ende des 2. Kapitels angestellten Betrachtungen an, und wollen, dem Beispiele S. CHANDRASEKHARS folgend, die Theorie zunächst in allgemeinen orthogonalen Koordinaten entwickeln. Der Übergang zu speziellen Koordinatensystemen, von denen wir zwei gebrauchen werden, nämlich das Cartesische und das Zylindrische, läßt sich nach den Angaben auf S. 77 leicht durchführen. Ebenso ergeben sich alle auf stationäre Fälle bezüglichen Formeln leicht aus den gleich abzuleitenden Ausdrükken für nicht-stationäre Zustände, indem wir in letzteren alle Glieder streichen, in denen zeitliche Derivierten auftreten.

Die von S. CHANDRASEKHAR behandelten Sternsysteme stellen einen sehr allgemeinen Typus von Sternsystemen dar, jedoch nicht den allgemeinsten, weil auch er eine einschränkende Annahme über die Form der Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten macht, und zwar die von uns bereits auf S. 63 erwähnte. Der Übersichtlichkeit halber wollen wir hier gleich zu Anfang die *drei Grundannahmen der Chandrasekharschen Theorie* anführen und mit Kommentaren versehen.

1. Annahme: In jedem durch die allgemeinen Koordinaten λ, μ, ν gekennzeichneten Raumpunkte kann in eindeutiger Weise ein lokales Koordinatensystem der Ruhe definiert werden, d. h. ein System, in dem die in der Umge-

bung des betrachteten Punktes befindlichen Sterne eine verschwindende mittlere Geschwindigkeit haben. Bezeichnen wir mit Λ_0, M_0, N_0 die Geschwindigkeitskomponenten des Anfangspunktes dieses Systems in bezug auf ein Inertialsystem, in dem der Schwerpunkt des gesamten Sternsystems als ruhend betrachtet werden kann, so sollen diese Geschwindigkeitskomponenten, die wir die Geschwindigkeitskomponenten des «Lokalen Zentroids» nennen wollen, stetige Funktionen der Raumkoordinaten λ, μ, ν und der Zeit t sein. Ihre Werte werden durch Mittelwertbildung über die entsprechenden, auf das Inertialsystem bezogenen Geschwindigkeitskomponenten aller in einem kleinen Raumgebiete um den Punkt λ, μ, ν befindlicher Sterne erhalten, und unsere 1. Annahme besagt, daß diese Werte bei immer kleiner werdendem Volumen des betrachteten Raumgebietes eindeutig gewissen Grenzwerten zustreben, deren Beträge von der Art des Grenzüberganges unabhängig sind. Die Geschwindigkeitskomponenten der einzelnen Sterne in bezug auf das in dieser Weise definierte Lokale Zentroid sind dann für die drei Hauptrichtungen durch die Ausdrücke

$$\Lambda - \Lambda_0 , \quad M - M_0 , \quad N - N_0 \tag{1}$$

gegeben, wo Λ, M, N die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten des Sternes in bezug auf das Inertialsystem sind.

In dieser Annahme ist keine irgendwie nennenswerte Einschränkung der Allgemeinheit zu erblicken, da es schon ganz ausgefallene Sternsysteme sein müßten, in denen sie nicht erfüllt wäre. Wir haben von ihr auch schon bei unseren früheren Entwicklungen häufig Gebrauch gemacht.

2. *Annahme:* Die das System in jedem Punkte und zu jeder Zeit charakterisierende Verteilungsfunktion F, die wir von nun an, in Übereinstimmung mit der von CHANDRASEKHAR eingeführten Bezeichnung, Ψ nennen wollen, soll von dem sog. *verallgemeinerten Schwarzschild*schen *Typus* sein, das heißt die von einem Argumente $(Q + \sigma)$ abhängende Form

$$\Psi(\lambda, \mu, \nu; \Lambda, M, N; t) \equiv \Psi(Q + \sigma) \tag{2}$$

haben, wo

$$Q = a(\Lambda - \Lambda_0)^2 + b(M - M_0)^2 + c(N - N_0)^2 + \tag{3}$$
$$+ 2f(M - M_0)(N - N_0) + 2g(N - N_0)(\Lambda - \Lambda_0) + 2h(\Lambda - \Lambda_0)(M - M_0)$$

einen quadratischen Ausdruck in den Komponenten der relativen Geschwindigkeiten bedeutet, der das «Geschwindigkeitsellipsoid» an jeder Stelle des Systems und zu jeder Zeit definiert. Die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids a, b, c, f, g, h und die Funktion σ sind alle stetige Funktionen

von λ, μ, ν und t. Wenn die Verteilungsfunktion die *spezielle* SCHWARZSCHILDsche Form.

$$\Psi = C\, e^{-(Q+\sigma)} \tag{3'}$$

hat, ist $e^{-\sigma}$, wie auf Grund von Formel (50) des 1. Kapitels sofort einzusehen ist, bis auf einen Normierungsfaktor gleich der räumlichen Sterndichte.

Diese Annahme, von der wir gleichfalls bereits öfters Gebrauch gemacht haben, und die eine durch die beobachteten Verhältnisse in unserem Galaktischen System nahegelegte Approximation darstellt, bedeutet als allgemeine theoretische Forderung eingeführt, bereits bei stationären Systemen eine nicht ganz unbedenkliche Einschränkung der Allgemeinheit. Noch bedenklicher erscheint sie aber bei einer Ausdehnung der Untersuchung auf zeitlich-veränderliche, nicht-stationäre Zustände; in diesem Falle enthält sie nämlich die Forderung, daß die Geschwindigkeitsverteilung während des ganzen Verlaufes der im Sternsystem stattfindenden Prozesse die im Ansatze (3) zum Ausdruck gebrachte *Punktsymmetrie* behalten soll. Hiermit werden alle Fälle ausgeschlossen, in denen diese Verteilung im Verlaufe der Entwicklung eine «Schiefheit» erhält, wodurch der Bereich auch der von der Theorie erfaßten Kraftgesetze, und Potentiale, eine nicht unwesentliche, nur durch rein mathematische Erwägungen bedingte Einschränkung erfahren dürfte. Über eine allgemeiner gefaßte Theorie verfügen wir jedoch noch nicht und müssen uns daher mit dieser Einschränkung abfinden, ohne sie aber deswegen aus den Augen zu verlieren.

3. Annahme: Die Bewegungen der einzelnen Sterne werden durch eine Potentialfunktion $\mathfrak{B}(\lambda, \mu, \nu; t)$ pro Masseneinheit bestimmt. Die Verteilungsfunktion muß dann der sich aus Gleichung (58) des 1. Kapitels ergebenden Grundgleichung der Stellardynamik genügen, in der durch (170) des 2. Kapitels für allgemeine orthogonale Koordinaten gegebenen Form, jedoch unter Hinzufügung des die *zeitliche* Derivierte dieser Funktion enthaltenden Gliedes. In den hier zu gebrauchenden Bezeichnungen schreiben wir diese Gleichung in der Form um:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \dot{\lambda}\,\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \dot{\mu}\,\frac{\partial \Psi}{\partial \mu} + \dot{\nu}\,\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + \dot{\Lambda}\,\frac{\partial \Psi}{\partial \Lambda} + \dot{M}\,\frac{\partial \Psi}{\partial M} + \dot{N}\,\frac{\partial \Psi}{\partial N} = 0 \tag{4}$$

oder, unter Berücksichtigung von (154) des 2. Kapitels,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\Lambda}{P}\,\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \frac{M}{Q}\,\frac{\partial \Psi}{\partial \mu} + \frac{N}{R}\,\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + \dot{\Lambda}\,\frac{\partial \Psi}{\partial \Lambda} + \dot{M}\,\frac{\partial \Psi}{\partial M} + \dot{N}\,\frac{\partial \Psi}{\partial N} = 0\,, \tag{5}$$

wo die «Beschleunigungen» $\dot{\Lambda}$, $\dot{M}$, $\dot{N}$, wie wir dort gesehen haben, mit Hilfe der Bewegungsgleichungen durch die Koordinaten λ, μ, ν, die Geschwindigkeitskomponenten längs der Hauptrichtungen Λ, M, N und das Potential $\mathfrak{B}$

ersetzt werden können. Diese dritte Annahme erscheint bei einem Sternsystem, in dem als einzige auf den einzelnen Stern wirkende Kraft die Summe der von der Gesamtheit aller im Sternsystem befindlichen Sterne, oder evtl. auch außerhalb von ihm liegenden Massen, ausgehenden NEWTONschen Gravitationswirkungen angenommen wird, als eine durchaus berechtigte, ja selbstverständliche Voraussetzung, die wir auch früher oft gemacht haben. Es ist hier nur, zur Vermeidung von Mißverständnissen, zu bemerken, daß die Potentialfunktion von CHANDRASEKHAR mit dem im 2. Kapitel eingeführten Potentiale V nicht völlig identisch ist, da sie nicht, wie dort, die in der dynamischen Astronomie als «Kräftefunktion» bezeichnete Funktion bedeutet, sondern die mit richtigem Vorzeichen genommene potentielle Energie. Zwischen V und $\mathfrak{B}$ besteht daher die einfache Beziehung:

$$\mathfrak{B} = -V\,.$$

Das von S. CHANDRASEKHAR gestellte und zu einem beträchtlichen Teile gelöste dynamische Problem kann nun an Hand der oben aufgezählten drei Annahmen folgendermaßen formuliert werden: *unter welchen Bedingungen läßt die Grundgleichung* (5), *als partielle Differentialgleichung für die Verteilungsfunktion Ψ aufgefaßt, eine Lösung von der Form* (2) *zu?*

Wir sehen, daß dieses Problem mit dem auf Seite 44 formulierten nicht identisch ist und daß wir daher von der hier zu entwickelnden Theorie auch keine Antwort auf die Frage, wie sich ein durch beliebig gegebene Anfangsbedingungen charakterisiertes Sternsystem im Verlaufe der Zeit weiterentwickelt, erwarten dürfen. Sie ist aber wohl imstande, uns einen Überblick über die verschiedenen Typen von Sternsystemen zu geben, die den drei ihr zugrunde liegenden Annahmen entsprechen und uns auf diese Weise eine Reihe von äußerst lehrreichen Beispielen von Sternsystemen der verschiedensten Arten vorzuführen, aus deren Studium wir auch eine tiefere Einsicht in die dynamischen Verhältnisse eines Sternsystems überhaupt gewinnen können.

Der grundsätzlichen Fragestellung CHANDRASEKHARS entsprechend, tritt auch die als zweite Bedingung für die Bestimmung der Verteilungsfunktion hinzukommende POISSONsche Gleichung in seiner Theorie vollständig zurück; die von der Potentialfunktion zu erfüllenden Bedingungen, durch die auch die verschiedenen Typen von Sternsystemen charakterisiert werden, bilden zwar den Kernpunkt seiner Betrachtungen, jedoch sind diese Bedingungen nicht etwa durch willkürlich gewählte räumliche Anfangsverteilungen der Systemsterne vorgeschrieben, da von solchen gar nicht ausgegangen wird, sondern durch die von Anfang an eingeführten drei Grundannahmen, zu denen dann weitere auf die Symmetrieverhältnisse usw. bezügliche Annahmen hinzutreten. In den wenigen Fällen, in denen auch die räumliche

Dichte in den Kreis der Betrachtungen einbezogen wird, erfolgt ihre Berechnung unmittelbar aus der bereits bestimmten Verteilungsfunktion, ohne daß die Frage, ob das Potential ausschließlich durch die dem System angehörenden Sterne bedingt wird, oder eventuell zum Teil auch von außerhalb liegenden Massen herrührt, einer Diskussion unterzogen wird. Da die Lösungen meistens in sehr allgemeiner Form erhalten werden und auch willkürliche Funktionen enthalten, ist für eine nachträgliche Anpassung an die durch die POISSONsche Gleichung gestellte zusätzliche Forderung ein gewisser Spielraum vorhanden.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet natürlich, wie immer die Grundgleichung der Stellardynamik, in diesem Falle in ihrer für allgemeine orthogonale krummlinige Koordinaten gültigen Form (5). Durch Einsetzen der in den Formeln (167) – (169) des 2. Kapitels gegebenen Ausdrücke der Beschleunigungen $\dot{\Lambda}$, $\dot{M}$, $\dot{N}$ hatten wir dort die Gleichung (172) erhalten, die wir hier direkt übernehmen können, indem wir sie noch durch das bei nicht-stationären Zuständen hinzukommende Glied $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ erweitern. Unsere Gleichung lautet nun:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial t} &+ \frac{1}{P}\left\{\Lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \tfrac{1}{2}\left[\frac{M^2}{Q^2}\frac{\partial Q^2}{\partial \lambda} + \frac{N^2}{R^2}\frac{\partial R^2}{\partial \lambda} - \frac{\Lambda M}{PQ}\frac{\partial P^2}{\partial \mu} - \right.\right.\\ &\qquad\left.\left. - \frac{\Lambda N}{PR}\frac{\partial P^2}{\partial \nu} - 2\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \lambda}\right]\frac{\partial \Psi}{\partial \Lambda}\right\} + \\ &+ \frac{1}{Q}\left\{M \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} + \tfrac{1}{2}\left[\frac{N^2}{R^2}\frac{\partial R^2}{\partial \mu} + \frac{\Lambda^2}{P^2}\frac{\partial P^2}{\partial \mu} - \frac{MN}{QR}\frac{\partial Q^2}{\partial \nu} - \right.\right.\\ &\qquad\left.\left. - \frac{M\Lambda}{QP}\frac{\partial Q^2}{\partial \lambda} - 2\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \mu}\right]\frac{\partial \Psi}{\partial M}\right\} + \\ &+ \frac{1}{R}\left\{N \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + \tfrac{1}{2}\left[\frac{\Lambda^2}{P^2}\frac{\partial P^2}{\partial \nu} + \frac{M^2}{Q^2}\frac{\partial Q^2}{\partial \nu} - \frac{N\Lambda}{RP}\frac{\partial R^2}{\partial \lambda} - \right.\right.\\ &\qquad\left.\left. - \frac{NM}{RQ}\frac{\partial R^2}{\partial \mu} - 2\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \nu}\right]\frac{\partial \Psi}{\partial N}\right\} = 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Hierin müssen nun alle partiellen Derivierten der Funktion Ψ eingesetzt werden, wie sie sich auf Grund der speziellen für Ψ vorausgesetzten Form aus (2) und (3) berechnen lassen. Hierbei werden wir gewisse abkürzende Bezeichnungen für gewisse Kombinationen der Orts- und Zeitfunktionen a, $b, c, f, g, h, \Lambda_0, M_0, N_0$ einführen, die bei den weiteren Entwicklungen ständig wiederkehren werden. Auf Grund von (2) und (3) erhalten wir zunächst

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \Lambda} = \frac{d\Psi}{d(\mathrm{Q}+\sigma)}\cdot\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \Lambda}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial M} = \frac{d\Psi}{d(\mathrm{Q}+\sigma)}\cdot\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial M}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial N} = \frac{d\Psi}{d(\mathrm{Q}+\sigma)}\cdot\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial N} \tag{7}$$

und

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = \frac{d\Psi}{d(Q+\sigma)}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} + \frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} = \frac{d\Psi}{d(Q+\sigma)}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mu} + \frac{\partial Q}{\partial \mu}\right),$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = \frac{d\Psi}{d(Q+\sigma)}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} + \frac{\partial Q}{\partial \nu}\right), \tag{8}$$

und wir haben nur noch die partiellen Derivierten von Q zu berechnen. Aus (3) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial \Lambda} &= 2a(\Lambda - \Lambda_0) + 2g(N - N_0) + 2h(M - M_0);\\
\frac{\partial Q}{\partial M} &= 2b(M - M_0) + 2f(N - N_0) + 2h(\Lambda - \Lambda_0);\\
\frac{\partial Q}{\partial N} &= 2c(N - N_0) + 2f(M - M_0) + 2g(\Lambda - \Lambda_0).
\end{aligned} \tag{9}$$

Nun führen wir die drei Hilfsgrößen

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= a\Lambda_0 + hM_0 + gN_0,\\
\Delta_2 &= h\Lambda_0 + bM_0 + fN_0,\\
\Delta_3 &= g\Lambda_0 + fM_0 + cN_0
\end{aligned} \tag{10}$$

ein, die uns weiterhin die Geschwindigkeitskomponenten Λ_0, M_0, N_0, ersetzen werden, da letztere aus (10) sofort berechnet werden können, sobald die Koeffizienten a, b, c, f, g, h des Geschwindigkeitsellipsoids bestimmt sind. Mit diesen Hilfsgrößen nehmen die Ausdrücke (9) die Form an:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial \Lambda} &= 2(a\Lambda + hM + gN - \Delta_1);\\
\frac{\partial Q}{\partial M} &= 2(h\Lambda + bM + fN - \Delta_2);\\
\frac{\partial Q}{\partial N} &= 2(g\Lambda + fM + cN - \Delta_3).
\end{aligned} \tag{11}$$

Andererseits ergibt sich aus (3) durch Differentiation nach λ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = \Lambda^2\frac{\partial a}{\partial \lambda} + M^2\frac{\partial b}{\partial \lambda} + N^2\frac{\partial c}{\partial \lambda} + 2\left[MN\frac{\partial f}{\partial \lambda} + N\Lambda\frac{\partial g}{\partial \lambda} + \Lambda M\frac{\partial h}{\partial \lambda}\right] -\\
- 2\Lambda\frac{\partial \Delta_1}{\partial \lambda} - 2M\frac{\partial \Delta_2}{\partial \lambda} - 2N\frac{\partial \Delta_3}{\partial \lambda} + \frac{\partial Q_0}{\partial \lambda}
\end{aligned} \tag{12}$$

und zwei ähnliche Ausdrücke für $\frac{\partial Q}{\partial \mu}$ und $\frac{\partial Q}{\partial \nu}$, in denen die Größe Q_0 die Bedeutung hat

$$Q_0 = a\Lambda_0^2 + bM_0^2 + cN_0^2 + 2fM_0N_0 + 2gN_0\Lambda_0 + 2h\Lambda_0M_0. \tag{13}$$

Es bleibt nur noch die Derivierte von Ψ nach der Zeit zu berechnen. Da nach unserer Voraussetzung sowohl die Koeffizienten a, b, c, f, g, h des Ge-

schwindigkeitsellipsoids, als auch σ und die Komponenten Λ_0, M_0, N_0, der Geschwindigkeit des Lokalen Zentroids Funktionen der Zeit sein sollen, erhalten wir wieder aus (2) und (3)

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial t} = \frac{d\Psi}{d(Q+\sigma)}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t}\right], \tag{14}$$

wo

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \Lambda^2\frac{\partial a}{\partial t} + M^2\frac{\partial b}{\partial t} + N^2\frac{\partial c}{\partial t} + 2\left[MN\frac{\partial f}{\partial t} + N\Lambda\frac{\partial g}{\partial t} + \Lambda M\frac{\partial h}{\partial t}\right] -$$

$$- 2\Lambda\frac{\partial \Delta_1}{\partial t} - 2M\frac{\partial \Delta_2}{\partial t} - 2N\frac{\partial \Delta_3}{\partial t} + \frac{\partial Q_0}{\partial t}\,. \tag{15}$$

Indem wir nun die durch (9), (12), (13) und (15) gegebenen Ausdrücke für die partiellen Derivierten von Q in (7), (8) und (14) einsetzen, und die so ausgerechneten Derivierten von Ψ in unsere Grundgleichung (6) einführen, erhalten wir nach Kürzung mit dem gemeinsamen Faktor $\frac{d\Psi}{d(Q+\sigma)}$, die unter den oben angeführten drei Annahmen gültige Grundgleichung der CHANDRASEKHARschen Theorie in der etwas umständlichen, aber durchaus übersichtlichen Form:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \Lambda^2\frac{\partial a}{\partial t} + M^2\frac{\partial b}{\partial t} + N^2\frac{\partial c}{\partial t} + 2MN\frac{\partial f}{\partial t} + 2N\Lambda\frac{\partial g}{\partial t} + 2\Lambda M\frac{\partial h}{\partial t} -$$

$$- 2\Lambda\frac{\partial \Delta_1}{\partial t} - 2M\frac{\partial \Delta_2}{\partial t} - 2N\frac{\partial \Delta_3}{\partial t} + \frac{\partial Q_0}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\Lambda}{P}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} + \Lambda^2\frac{\partial a}{\partial \lambda} + M^2\frac{\partial b}{\partial \lambda} + N^2\frac{\partial c}{\partial \lambda} + 2MN\frac{\partial f}{\partial \lambda} + 2N\Lambda\frac{\partial g}{\partial \lambda} + 2\Lambda M\frac{\partial h}{\partial \lambda} -\right.$$

$$\left. - 2\Lambda\frac{\partial \Delta_1}{\partial \lambda} - 2M\frac{\partial \Delta_2}{\partial \lambda} - 2N\frac{\partial \Delta_3}{\partial \lambda} + \frac{\partial Q_0}{\partial \lambda}\right] +$$

$$+ \frac{M}{Q}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \mu} + \Lambda^2\frac{\partial a}{\partial \mu} + M^2\frac{\partial b}{\partial \mu} + N^2\frac{\partial c}{\partial \mu} + 2MN\frac{\partial f}{\partial \mu} + 2N\Lambda\frac{\partial g}{\partial \mu} + 2\Lambda M\frac{\partial h}{\partial \mu} -\right.$$

$$\left. - 2\Lambda\frac{\partial \Delta_1}{\partial \mu} - 2M\frac{\partial \Delta_2}{\partial \mu} - 2N\frac{\partial \Delta_3}{\partial \mu} + \frac{\partial Q_0}{\partial \mu}\right] +$$

$$+ \frac{N}{R}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} + \Lambda^2\frac{\partial a}{\partial \nu} + M^2\frac{\partial b}{\partial \nu} + N^2\frac{\partial c}{\partial \nu} + 2MN\frac{\partial f}{\partial \nu} + 2N\Lambda\frac{\partial g}{\partial \nu} + 2\Lambda M\frac{\partial h}{\partial \nu} -\right.$$

$$\left. - 2\Lambda\frac{\partial \Delta_1}{\partial \nu} - 2M\frac{\partial \Delta_2}{\partial \nu} - 2N\frac{\partial \Delta_3}{\partial \nu} + \frac{\partial Q_0}{\partial \nu}\right] +$$

$$+ \frac{1}{P}\left[\frac{M^2}{Q^2}\frac{\partial Q^2}{\partial \lambda} + \frac{N^2}{R^2}\frac{\partial R^2}{\partial \lambda} - \frac{\Lambda M}{PQ}\frac{\partial P^2}{\partial \mu} - \frac{\Lambda N}{PR}\frac{\partial P^2}{\partial \nu} - 2\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \lambda}\right](a\Lambda + hM +$$

$$+ gN - \Delta_1) +$$

$$+ \frac{1}{Q}\left[\frac{N^2}{R^2}\frac{\partial R^2}{\partial \mu} + \frac{\Lambda^2}{P^2}\frac{\partial P^2}{\partial \mu} - \frac{MN}{QR}\frac{\partial Q^2}{\partial \nu} - \frac{M\Lambda}{QP}\frac{\partial Q^2}{\partial \lambda} - 2\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \mu}\right](h\Lambda + bM +$$

$$+ fN - \Delta_2) +$$

$$+ \frac{1}{R}\left[\frac{\Lambda^2}{P^2}\frac{\partial P^2}{\partial \nu} + \frac{M^2}{Q^2}\frac{\partial Q^2}{\partial \nu} - \frac{N\Lambda}{RP}\frac{\partial R^2}{\partial \lambda} - \frac{NM}{RQ}\frac{\partial R^2}{\partial \mu} - 2\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \nu}\right](g\Lambda + fM +$$

$$+ cN - \Delta_3) = 0\,. \tag{16}$$

Trotzdem die obenstehende Gleichung einhundert und vier Summanden enthält, läßt sich ihr Aufbau ohne große Mühe übersehen. Die erste Zeile und die drei in den darauffolgenden Zeilen auftretenden Klammerausdrücke sind vollständig analog gebaut und unterscheiden sich nur durch die Variable, nach der jeweils partiell differentiiert wird; sie ist bzw. t, λ, μ und ν. Die beiden letzten Zeilen gehen aus der fünften durch zyklische Vertauschung von P, Q, R sowie Λ, M, N und λ, μ, ν in den eckigen Klammern hervor, während die in den runden Klammern stehenden Faktoren unmittelbar aus den Ausdrücken (10) durch Ersetzen von Λ_0, M_0, N_0 durch Λ, M, N erhalten werden können. Die linke Seite der Gleichung (16) stellt, wie sofort einzusehen, ein Polynom dritten Grades in Λ, M, N dar, und kann daher nur dann, für beliebig gewählte Werte dieser Größen, gleich Null sein, wenn die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen und ihrer Produkte, $\Lambda^i M^j N^k$ $(i, j, k = 0, 1, 2, 3)$ einzeln verschwinden. Die Anzahl aller möglichen Kombinationen dieser Art ist aber, wie leicht einzusehen, 20, und unsere Grundgleichung (16) entspricht daher einem System von 20 partiellen Differentialgleichungen, aus denen sich die unbekannten Funktionen von λ, μ, ν und der Zeit t bestimmen lassen müssen. Die Auflösung und Diskussion dieses Gleichungssystems muß daher den Kernpunkt unserer weiteren Betrachtungen bilden.

S. Chandrasekhar hat das zu lösende Gleichungssystem zunächst in allgemeinen Koordinaten, direkt aus der Grundgleichung (16) erhalten und dann für eine Reihe von orthogonalen Koordinatensystemen spezialisiert und gelöst; da wir hier nur einen ganz kurzen Überblick über einige seiner Ergebnisse zu geben beabsichtigen, hätte es für uns keinen Zweck, die Untersuchung in so großer Allgemeinheit weiterzuführen, und wir werden uns daher damit begnügen, die Entwicklungen, gewissermaßen als Musterbeispiel, in Cartesischen Koordinaten durchzuführen.

Setzen wir, wie das dem Falle des Gebrauchs von Cartesischen Koordinaten entspricht, (s. Gleichungen (153') des 2. Kapitels),

$$P = Q = R = 1, \qquad (17)$$

indem wir die Koordinaten λ, μ, ν in der angegebenen Reihenfolge etwa mit x, y und z identifizieren und die Geschwindigkeitskomponenten längs den drei Achsen mit X, Y, Z bezeichnen, so fallen in (16) alle Glieder weg, die eine Derivierte von P, Q oder R nach einer Koordinate enthalten, und unsere Grundgleichung vereinfacht sich zu:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + X^2 \frac{\partial a}{\partial t} + Y^2 \frac{\partial b}{\partial t} + Z^2 \frac{\partial c}{\partial t} + 2\,YZ \frac{\partial f}{\partial t} + 2\,ZX \frac{\partial g}{\partial t} + 2\,XY \frac{\partial h}{\partial t} -$$

$$- 2\,X \frac{\partial \Delta_1}{\partial t} - 2\,Y \frac{\partial \Delta_2}{\partial t} - 2\,Z \frac{\partial \Delta_3}{\partial t} + \frac{\partial Q_0}{\partial t} +$$

$$
\begin{aligned}
&+X\Big[\frac{\partial\sigma}{\partial x}+X^2\frac{\partial a}{\partial x}+Y^2\frac{\partial b}{\partial x}+Z^2\frac{\partial c}{\partial x}+2YZ\frac{\partial f}{\partial x}+2ZX\frac{\partial g}{\partial x}+2XY\frac{\partial h}{\partial x}-\\
&\qquad\qquad -2X\frac{\partial\Delta_1}{\partial x}-2Y\frac{\partial\Delta_2}{\partial x}-2Z\frac{\partial\Delta_3}{\partial x}+\frac{\partial Q_0}{\partial x}\Big]+\\
&+Y\Big[\frac{\partial\sigma}{\partial y}+X^2\frac{\partial a}{\partial y}+Y^2\frac{\partial b}{\partial y}+Z^2\frac{\partial c}{\partial y}+2YZ\frac{\partial f}{\partial y}+2ZX\frac{\partial g}{\partial y}+2XY\frac{\partial h}{\partial y}-\\
&\qquad\qquad -2X\frac{\partial\Delta_1}{\partial y}-2Y\frac{\partial\Delta_2}{\partial y}-2Z\frac{\partial\Delta_3}{\partial y}+\frac{\partial Q_0}{\partial y}\Big]+\\
&+Z\Big[\frac{\partial\sigma}{\partial z}+X^2\frac{\partial a}{\partial z}+Y^2\frac{\partial b}{\partial z}+Z^2\frac{\partial c}{\partial z}+2YZ\frac{\partial f}{\partial z}+2ZX\frac{\partial g}{\partial z}+2XY\frac{\partial h}{\partial z}-\\
&\qquad\qquad -2X\frac{\partial\Delta_1}{\partial z}-2Y\frac{\partial\Delta_2}{\partial z}-2Z\frac{\partial\Delta_3}{\partial z}+\frac{\partial Q_0}{\partial z}\Big]-\\
&\qquad\qquad -2\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}(aX+hY+gZ-\Delta_1)-\\
&\qquad\qquad -2\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial y}(hX+bY+fZ-\Delta_2)-\\
&\qquad\qquad -2\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}(gX+fY+cZ-\Delta_3)=0. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Indem wir nun hierin noch zur Abkürzung die Bezeichnung

$$Q_0+\sigma=-\chi(x,y,z,t) \qquad (19)$$

einführen und die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen und Kombinationen von Potenzen von X, Y und Z einzeln gleich Null setzen, können wir das obenerwähnte System von zwanzig partiellen Differentialgleichungen aus (18) direkt ablesen. Das von X, Y und Z freie Glied ergibt z. B.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(Q_0+\sigma)}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\chi}{\partial t}=-\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}\cdot\Delta_1-\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial y}\Delta_2-\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}\Delta_3 \qquad (20)$$

und die Koeffizienten der ersten Potenzen von X bzw. Y und Z liefern

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\chi}{\partial x}+2\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}a+\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial y}h+\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}g\right)+2\frac{\partial\Delta_1}{\partial t}=0\\
&\frac{\partial\chi}{\partial y}+2\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}h+\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial y}b+\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}f\right)+2\frac{\partial\Delta_2}{\partial t}=0 \qquad (21)\\
&\frac{\partial\chi}{\partial z}+2\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}g+\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial y}f+\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}c\right)+2\frac{\partial\Delta_3}{\partial t}=0.
\end{aligned}
$$

Das vollständige System der zwanzig partiellen Differentialgleichungen ergibt sich daher zu:

$$
\left.
\begin{array}{llll}
\frac{\partial a}{\partial x} = 0, \quad (1); & \frac{\partial b}{\partial y} = 0, \quad (2); & \frac{\partial c}{\partial z} = 0, \quad (3); & \\
2\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} = 0, \quad (4); & & 2\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial z} = 0, \quad (5); & \\
2\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} = 0, \quad (6); & & 2\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z} = 0, \quad (7); & \\
2\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad (8); & & 2\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial y} = 0, \quad (9); & \\
& & \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad (10); &
\end{array}
\right\} \quad (I)
$$

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\frac{\partial \Delta_1}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial t}, \quad (1); & \frac{\partial \Delta_2}{\partial x} + \frac{\partial \Delta_1}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (4); \\
\frac{\partial \Delta_2}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial t}, \quad (2); & \frac{\partial \Delta_3}{\partial y} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (5); \\
\frac{\partial \Delta_3}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial t}, \quad (3); & \frac{\partial \Delta_1}{\partial z} + \frac{\partial \Delta_3}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial t} \quad (6);
\end{array}
\right\} \quad (II)
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix} \operatorname{grad} \mathfrak{B} + \frac{\partial \Delta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \operatorname{grad} \chi; \\
\Delta \operatorname{grad} \mathfrak{B} = \frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial t}.
\end{array}
\right\} \quad (III)
$$

Die unter (III) stehenden Ausdrücke sind, wie leicht einzusehen, nichts anderes als die Zusammenfassung der drei Gleichungen (21) zu einer einzigen Vektorgleichung, mit Hilfe der Regel für Matrizenmultiplikation, und die Umschreibung der Gleichung (20) als skalares Produkt zweier Vektoren, wobei der eine Vektor grad $\mathfrak{B}$ ist, mit den Komponenten

$$
\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x}; \qquad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y}; \qquad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z},
$$

während die Komponenten des zweiten, mit Δ bezeichneten Vektors, bzw. gleich Δ_1, Δ_2 und Δ_3 sind.

Wie wir sehen, zerfallen unsere zwanzig partiellen Differentialgleichungen in drei voneinander scharf geschiedene Gruppen, die wir mit (I), (II) und (III) bezeichnet haben. Die unter (I) zusammengefaßten zehn Gleichungen enthalten als zu bestimmende Funktionen ausschließlich die Koeffizienten a, b, c, f, g, h des Geschwindigkeitsellipsoids; die allgemeinen Lösungen für diese Funktionen können daher aus dem Gleichungssystem (I) ohne Rücksicht auf die übrigen zehn Gleichungen erhalten werden. Mit diesen Lösungen lassen sich dann die rechten Seiten der Gleichungen der Gruppe (II) berechnen, worauf sie ein System von Gleichungen zur Bestimmung der Grö-

ßen Δ_1, Δ_2, Δ_3 ergeben. Die vier Gleichungen der Gruppe (III) haben einen ganz anderen Charakter, indem sie Beziehungen zwischen den neun den Bewegungszustand charakterisierenden Funktionen $a, b, c, f, g, h, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, und der Potentialfunktion $\mathfrak{B}$, sowie der mit der räumlichen Dichte eng verbundenen Funktion χ herstellen. Diese letzte Gruppe von Gleichungen wird von CHANDRASEKHAR als die «Kompatibilitätsbedingungen» bezeichnet.

Noch krasser tritt der Unterschied der drei Gruppen von Gleichungen hervor, wenn wir sie für den stationären Zustand, den sie selbstverständlich auch mit umfassen, spezialisieren. Dies geschieht natürlich einfach dadurch, daß wir in allen Gleichungen die Glieder streichen, die eine partielle Derivierte nach der Zeit enthalten. Und nun stellen wir zunächst fest, daß solche Glieder in den zehn Gleichungen der Gruppe (I) überhaupt nicht vorkommen. Dies bedeutet, daß die Lösungen für die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids im nicht-stationären Falle mit denjenigen für den stationären Fall formal übereinstimmen; der einzige Unterschied wird darin bestehen, daß die in die für letzteren Fall erhaltenen Lösungen eingehenden *Integrationskonstanten* bei einem nicht-stationären System zunächst als *willkürliche Funktionen der Zeit* betrachtet werden müssen. Die rechten Seiten aller sechs Gleichungen (II) sind für ein stationäres System gleich Null, und wir sehen jetzt, daß in diesem Falle dieses Gleichungssystem die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids überhaupt nicht mehr enthält, so daß sich die Funktionen Δ_1, Δ_2, Δ_3 aus ihm ganz unabhängig von allen anderen Gleichungen bestimmen lassen, wie das für die Größen a, b, c, f, g, h unter allen Umständen der Fall ist. Es erweist sich aber auch weiter, daß die Gleichungen (II) eine gewisse Einschränkung für die Abhängigkeit letzterer Größen von der Zeit mit sich bringen: betrachten wir z. B. ein Sternsystem ohne systematische innere Bewegungen (CHANDRASEKHAR nennt ein solches System — ohne differentielle Bewegungen), so müssen in ihm die Bedingungen

$$X_0 \equiv Y_0 \equiv Z_0 \equiv 0$$

identisch erfüllt sein. Nach der Definitionsgleichung (10) folgt daraus aber, daß alle Δ_i bei beliebigen a, b, c, f, g, h identisch gleich Null sind, und die Gleichungen (II) sagen dann aus, daß dies nur in dem Falle möglich ist, wenn die sechs Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids *konstante* Werte haben. Wir werden also in diesem Falle auf den stationären Zustand zurückgeführt und schließen daraus, daß die Betrachtung nicht-stationärer Fälle nur dann zu nicht-trivialen Ergebnissen führt, wenn das System innere differentielle Bewegungen aufweist.

Die vier letzten Gleichungen, die wir in der Gruppe (III) zusammengefaßt haben, sind, wie bereits oben hervorgehoben, von einer anderen Natur als (I) und (II); aus ihnen lassen sich sechs andere Bedingungen ableiten,

deren Erfüllung für die Integrabilität des Systems notwendig ist. Bei stationären Systemen nimmt die letzte Gleichung (III) eine besonders einfache Form an, nämlich

$$\Delta_1 \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} + \Delta_2 \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \Delta_3 \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} = 0, \tag{22}$$

was eine partielle Differentialgleichung für $\mathfrak{B}$ vom LAGRANGEschen Typus darstellt, deren Lösung nach dem im 2. Kapitel auf S. 46 gesagten, in der Form

$$\mathfrak{B}(x, y, z) = \mathfrak{W}(I_1, I_2) \tag{23}$$

erhalten werden kann, wo $\mathfrak{W}$ eine willkürliche Funktion der Argumente I_1, I_2 ist, und letztere zwei voneinander unabhängige erste Integrale des zugeordneten gewöhnlichen Differentialgleichungssystems

$$\frac{dx}{\Delta_1} = \frac{dy}{\Delta_2} = \frac{dz}{\Delta_3} \tag{24}$$

darstellen. In ähnlicher Weise ergibt sich aus den drei ersten Gleichungen (III) eine partielle Differentialgleichung des LAGRANGEschen Typus für die Funktion χ, aus der sich diese als Funktion nur zweier Argumente J_1, J_2 ergibt, worauf wir hier aber nicht näher eingehen wollen.

1. Lösung des Gleichungssystems (I) für die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids.

Unsere erste Aufgabe besteht in der Bestimmung der Koeffizienten a, b, c, f, g, h des Geschwindigkeitsellipsoids, wobei wir uns, nach dem oben gesagten, um die zeitliche Abhängigkeit dieser Größen zunächst nicht zu kümmern brauchen. Wir wollen hier diese Berechnung in aller Ausführlichkeit bringen, weil sie als Musterbeispiel für zahlreiche andere ähnliche Berechnungen, die in den Untersuchungen CHANDRASEKHARS vorkommen, dienen kann und wegen ihrer trotz aller Umständlichkeit theoretischen Einfachheit geeignet erscheint, dem Anfänger das tiefere Eindringen in das Studium der Originalarbeiten zu erleichtern.

Der algebraische Charakter der Abhängigkeit der Größen a, b, c, f, g, h von den Koordinaten x, y, z ist aus der Betrachtung der Gleichungen (I) (1) bis (10) sofort zu ermitteln. Aus der ersten dieser Gleichungen sehen wir schon, daß a von x nicht abhängen kann; differentiieren wir nun Gleichung (6) nach y, so erhalten wir, im Hinblicke auf (2)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und daher } \frac{\partial h}{\partial y} = p(x, z) \quad \text{und} \quad h = p(x, z) \cdot y + q(x, z),$$

wo p und q irgendwelche Funktionen von x, z, aber nicht von y bezeichnen. Differentiieren wir nun den soeben erhaltenen Ausdruck für h nach x und

setzen ihn in Gleichung (4) ein, so sehen wir, daß $\partial a/\partial y$ eine lineare Funktion von y ist, das a selbst also eine quadratische Funktion von y sein muß. In genau derselben Weise kann unter Verwendung der Gleichungen (8) [Differentiation nach z und Berücksichtigung von (3) und (5)] gezeigt werden, daß b auch in der Variablen z quadratisch ist, und wir erhalten daher, durch einfache zyklische Vertauschung der Koordinaten und der Koeffizienten a, b, c das Schema:

a ist unabhängig von x und quadratisch in y und z,
b ist unabhängig von y und quadratisch in z und x, (25)
c ist unabhängig von z und quadratisch in x und y.

Wir wenden uns nun der Betrachtung der drei übrigen Koeffizienten f, g, h zu. Durch Differentiation von Gleichung (7) nach y und Berücksichtigung von (2) erhalten wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und daher} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = r(x, z) \quad \text{und} \quad f = r(x, z) \cdot y + s(x, z),$$

wo r und s wieder irgendwelche Funktionen von x, z, aber nicht von y bedeuten; das f ist also in y linear. Durch eine ganz analoge Behandlung der Gleichung (9) und Berücksichtigung von (3) zeigen wir, daß das f auch in z linear sein muß. Durch zyklische Vertauschung der Koordinaten sowie der Größen f, g, h erhalten wir daher

$$\begin{aligned} f &= f_1 + f_2 y + f_3 z + f_4 yz, \\ g &= g_1 + g_2 z + g_3 x + g_4 zx, \\ h &= h_1 + h_2 x + h_3 y + h_4 xy, \end{aligned} \tag{26}$$

wo die f_i, g_i, h_i zunächst willkürliche Funktionen von x allein bzw. von y allein und von z allein sind. Differentiieren wir aber die zweite Gleichung (26) nach y, die dritte nach z und setzen die Ergebnisse in Gleichung (I, 10) ein, so sehen wir sofort, daß $\partial f/\partial x$ linear in x, das f selbst also quadratisch in x sein muß. Wir haben daher wiederum durch zyklische Vertauschung das Ergebnis:

f ist linear in y und z und quadratisch in x,
g ist linear in z und x und quadratisch in y, (25')
h ist linear in x und y und quadratisch in z,

und wir schließen hieraus, daß unsere Funktionen f_i, g_i, h_i in den Gleichungen (26) quadratische Ausdrücke in ihren Argumenten, also in x, bzw. in y oder z sein müssen. Wir können daher setzen:

$$\begin{aligned} f_i &= f_{i0} + f_{i1} x + f_{i2} x^2, \\ g_i &= g_{i0} + g_{i1} y + g_{i2} y^2, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ h_i &= h_{i0} + h_{i1} z + h_{i2} z^2, \end{aligned} \tag{27}$$

wo alle Koeffizienten $f_{i0} \ldots h_{i2}$ im Falle eines stationären Systems zunächst willkürliche Konstanten, im Falle eines nicht-stationären Systems zunächst willkürliche Funktionen der Zeit t sind.

Nun ergibt sich, wenn wir die Gleichungen (4) und (5) unseres Systems (I) nach z bzw. nach y, die Gleichungen (6) und (7) bzw. nach z und x und die Gleichungen (8) und (9) bzw. nach y und nach x differentiieren

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z}; \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}. \tag{28}$$

Diese drei Bedingungen, zu denen noch Gleichung (I, 10) hinzutritt, werden uns die Möglichkeit geben, die in unsere Lösung (26), (27) eingehende Anzahl von unabhängigen willkürlichen Konstanten (bzw. Funktionen der Zeit) beträchtlich zu verringern. Durch Einsetzen der Ausdrücke (26) in die Beziehungen (28) erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial y}(g_3 + g_4 z) = \frac{\partial}{\partial z}(h_2 + h_4 y); \qquad \frac{\partial}{\partial z}(h_3 + h_4 x) = \frac{\partial}{\partial x}(f_2 + f_4 z);$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(f_3 + f_4 y) = \frac{\partial}{\partial y}(g_2 + g_4 x), \tag{29}$$

und indem wir hierin die Ausdrücke für die f_i, g_i, h_i aus (27) einführen

$$\begin{aligned} g_{31} + 2 g_{32} y + z(g_{41} + 2 g_{42} y) &= h_{21} + 2 h_{22} z + y(h_{41} + 2 h_{42} z), \\ h_{31} + 2 h_{32} z + x(h_{41} + 2 h_{42} z) &= f_{21} + 2 f_{22} x + z(f_{41} + 2 f_{42} x), \\ f_{31} + 2 f_{32} x + y(f_{41} + 2 f_{42} x) &= g_{21} + 2 g_{22} y + x(g_{41} + 2 g_{42} y), \end{aligned} \tag{30}$$

woraus sich durch Gleichsetzung der Koeffizienten von x, y, z und ihrer Produkte nach einer einfachen Zwischenrechnung ergibt

$$\begin{aligned} f_{21} &= h_{31}; & f_{41} &= 2 g_{22} = 2 h_{32}; & & \\ g_{21} &= f_{31}; & g_{41} &= 2 h_{22} = 2 f_{32}; & f_{42} &= g_{42} = h_{42}. \\ h_{21} &= g_{31}; & h_{41} &= 2 f_{22} = 2 g_{32}; & & \end{aligned} \tag{31}$$

Andererseits erhalten wir durch Einsetzen der Ausdrücke (26), (27) in (I, 10)

$$\begin{aligned} &(f_{11} + 2 f_{12} x) + (f_{21} + 2 f_{22} x) y + (f_{31} + 2 f_{32} x) z + (f_{41} + 2 f_{42} x) yz + \\ &+ (g_{11} + 2 g_{12} y) + (g_{21} + 2 g_{22} y) z + (g_{31} + 2 g_{32} y) x + (g_{41} + 2 g_{42} y) zx + \\ &+ (h_{11} + 2 h_{12} z) + (h_{21} + 2 h_{22} z) x + (h_{31} + 2 h_{32} z) y + (h_{41} + 2 h_{42} z) xy = 0, \end{aligned} \tag{32}$$

woraus sich wiederum durch Gleichsetzen der Koeffizienten von x, y, z usw. die nachfolgenden Beziehungen zwischen den Integrationskonstanten ergeben:

$$\begin{aligned} f_{11} + g_{11} + h_{11} &= 0\,; & 2f_{22} + 2g_{32} + h_{41} &= 0\,; \\ 2f_{12} + g_{31} + h_{21} &= 0\,; & f_{41} + 2g_{22} + 2h_{32} &= 0\,; \\ f_{21} + 2g_{12} + h_{31} &= 0\,; & 2f_{32} + g_{41} + 2h_{22} &= 0\,; \\ f_{31} + g_{21} + 2h_{12} &= 0\,; & f_{42} + g_{42} + h_{42} &= 0\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Durch Vergleich der in (31) und (33) zusammengefaßten Ergebnisse erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} f_{12} &= -h_{21} = -g_{31}\,; & f_{22} &= g_{32} = h_{41} = h_{42} = 0\,; \\ g_{12} &= -f_{21} = -h_{31}\,; & g_{22} &= h_{32} = f_{41} = f_{42} = 0\,; \qquad f_{11} + g_{11} + h_{11} = 0\,. \\ h_{12} &= -g_{21} = -f_{31}\,; & h_{22} &= f_{32} = g_{41} = g_{42} = 0\,; \end{aligned} \tag{34}$$

Wir sehen hieraus, daß von den in die Lösung (26), (27) eingehenden 36 Konstanten zunächst 12 gleich Null sein müssen und weitere 6 durch die übrigen ausdrückbar sind; da die letzte Gleichung (34) noch eine der drei Konstanten f_{11}, g_{11}, h_{11} mit Hilfe der zwei anderen auszudrücken gestattet, ist also die Anzahl der in unsere Lösung eingehenden unabhängigen Konstanten gleich 17. Aus Symmetriegründen wollen wir für sie die Bezeichnungen wählen:

$$f_{10},\ g_{10},\ h_{10},\ f_{20},\ g_{20},\ h_{20},\ f_{21},\ g_{21},\ h_{21},\ f_{30},\ g_{30},\ h_{30},\ f_{40},\ g_{40},\ h_{40},$$

und f_{11}, g_{11}, h_{11} mit der Beziehung

$$f_{11} + g_{11} + h_{11} = 0\,. \tag{35}$$

Die Lösung für die drei ersten Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids kann nun auch ohne Mühe erhalten werden; wir brauchen sie nur für den Koeffizienten a abzuleiten, da sich die Lösungen für b und c dann durch zyklische Vertauschungen ergeben. Aus Gleichung (4) des Gleichungssystems (I) haben wir, indem wir in sie die für h erhaltene Lösung einsetzen

$$\frac{\partial a}{\partial y} = -2\frac{\partial h}{\partial x} = -2\,(h_{20} + h_{21}z) - 2\,h_{40}\,y\,. \tag{36}$$

Nach (25) muß aber a unabhängig von x und quadratisch in y und z sein; wenn wir also Gleichung (36) nach y integrieren, müssen wir dem Ergebnisse als «Integrationskonstante» eine quadratische Funktion von z additiv hinzufügen. Wir erhalten auf diese Weise

$$a = -2\,(h_{20} + h_{21}z)\,y - h_{40}\,y^2 - (a_0 + a_1 z + a_2 z^2)\,, \tag{37}$$

wo a_0, a_1, a_2 Konstanten (bzw. willkürliche Funktionen der Zeit) bedeuten. Aus der Gleichung (5) des Gleichungssystems (I) erhalten wir nun, wenn wir in ihr das $\partial g/\partial x$ durch den aus der bereits erhaltenen Lösung für g folgenden Ausdruck ersetzen

$$2 h_{21} y + a_1 + 2 a_2 z = 2 g_{30} + 2 h_{21} y + 2 g_{40} z \tag{38}$$

und schließen hieraus, daß

$$a_1 = 2 g_{30}, \qquad a_2 = g_{40} \tag{39}$$

sein muß. Unser Lösungssystem für die sechs Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids lautet also, unter Berücksichtigung aller oben gewonnenen Resultate:

$$\begin{aligned}
a &= -2(h_{20} + h_{21} z) y - h_{40} y^2 - (a_0 + 2 g_{30} z + g_{40} z^2);\\
b &= -2(f_{20} + f_{21} x) z - f_{40} z^2 - (b_0 + 2 h_{30} x + h_{40} x^2);\\
c &= -2(g_{20} + g_{21} y) x - g_{40} x^2 - (c_0 + 2 f_{30} y + f_{40} y^2);\\
f &= (f_{10} + f_{11} x - h_{21} x^2) + (f_{20} + f_{21} x) y + (f_{30} + g_{21} x) z + f_{40} y z;\\
g &= (g_{10} + g_{11} y - f_{21} y^2) + (g_{20} + g_{21} y) z + (g_{30} + h_{21} y) x + g_{40} z x;\\
h &= (h_{10} + h_{11} z - g_{21} z^2) + (h_{20} + h_{21} z) x + (h_{30} + f_{21} z) y + h_{40} x y.
\end{aligned} \tag{40}$$

Zu unseren 17 Integrationskonstanten sind hier noch drei weitere, nämlich a_0, b_0 und c_0 hinzugekommen, so daß die allgemeine Lösung für die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids im ganzen also *zwanzig* unabhängige Konstanten, bzw. im nicht-stationären Falle zunächst willkürliche Funktionen der Zeit t, enthält.

2. *Lösung des Gleichungssystems (II) für die Bewegung des Lokalen Zentroids.*

Unsere nächste Aufgabe besteht in der Berechnung der Größen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, aus dem Gleichungssystem (II), deren Kenntnis in Verbindung mit der bereits erhaltenen Lösung für die Größen a, b, c, f, g, h uns die Berechnung der Komponenten X_0, Y_0, Z_0 der Geschwindigkeit des Lokalen Zentroids aus dem Gleichungssystem (10) gestattet, das für ein Cartesisches Koordinatensystem spezialisiert die Form annimmt:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= a X_0 + h Y_0 + g Z_0;\\
\Delta_2 &= h X_0 + b Y_0 + f Z_0;\\
\Delta_3 &= g X_0 + f Y_0 + c Z_0.
\end{aligned} \tag{41}$$

Indem wir die in (25) und (25') formulierte Abhängigkeit der Koeffizienten a, b, c, f, g, h von den Koordinaten x, y, z beachten, sehen wir aus den Gleichungen (II) unmittelbar, daß

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \Delta_1}{\partial x^2} = 0; \qquad \frac{\partial^3 \Delta_1}{\partial y^3} = 0; \qquad \frac{\partial^3 \Delta_1}{\partial z^3} = 0;\\
&\frac{\partial^2 \Delta_2}{\partial y^2} = 0; \qquad \frac{\partial^3 \Delta_2}{\partial z^3} = 0; \qquad \frac{\partial^3 \Delta_2}{\partial x^3} = 0;\\
&\frac{\partial^2 \Delta_3}{\partial z^2} = 0; \qquad \frac{\partial^3 \Delta_3}{\partial x^3} = 0; \qquad \frac{\partial^3 \Delta_3}{\partial y^3} = 0
\end{aligned} \tag{42}$$

sein muß. In Worten ausgedrückt, bedeuten die Beziehungen (42):

$$\begin{aligned} &\Delta_1 \text{ ist linear in } x \text{ und quadratisch in } y \text{ und } z, \\ &\Delta_2 \text{ ist linear in } y \text{ und quadratisch in } z \text{ und } x, \\ &\Delta_3 \text{ ist linear in } z \text{ und quadratisch in } x \text{ und } y. \end{aligned} \qquad (43)$$

Andererseits ergeben die Gleichungen (II, 1—3), da a, b, c, unabhängig von x, bzw. von y und von z, sein müssen,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial t} x + \text{Funktion } (y, z, t) \\ \Delta_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial t} y + \text{Funktion } (z, x, t) \\ \Delta_3 &= \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial t} z + \text{Funktion } (x, y, t) \quad . \end{aligned} \qquad (44)$$

Die allgemeinen Ausdrücke für $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ergeben sich daher, auf Grund der Feststellungen (43) und (44) zu

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial t} x + \alpha_{22} y^2 z^2 + \alpha_{21} y^2 z + \alpha_{12} y z^2 + \alpha_{20} y^2 + \alpha_{02} z^2 + \alpha_{11} y z + \\ &\qquad + \beta_3 y + \gamma_2 z + \delta_1, \\ \Delta_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial t} y + \beta_{22} z^2 x^2 + \beta_{21} z^2 x + \beta_{12} z x^2 + \beta_{20} z^2 + \beta_{02} x^2 + \beta_{11} z x + \\ &\qquad + \beta_1 z + \gamma_3 x + \delta_2, \\ \Delta_3 &= \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial t} z + \gamma_{22} x^2 y^2 + \gamma_{21} x^2 y + \gamma_{12} x y^2 + \gamma_{20} x^2 + \gamma_{02} y^2 + \gamma_{11} x y + \\ &\qquad + \beta_2 x + \gamma_1 y + \delta_3, \end{aligned} \qquad (45)$$

in denen $\alpha_{22}, \alpha_{21} \ldots\ldots \delta_3$ alle als Funktionen der Zeit aufzufassen sind, die wir zunächst als willkürlich betrachten. Wegen der drei letzten Gleichungen des Systems (II) werden zwischen diesen Funktionen und den in die Lösungen (40) für die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids eingehenden Funktionen der Zeit f_{ik}, g_{ik}, h_{ik} gewisse Beziehungen bestehen, die wir durch Einsetzen der Ausdrücke (45) sowie der Ausdrücke (40) in die Gleichungen (II, 4—6) und Gleichsetzung der Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von x, y, z und deren Produkte erhalten können. Die wiederum etwas umständliche, jedoch durchaus elementare Ausrechnung braucht hier nicht vollständig wiedergegeben zu werden. Das Ergebnis ist das nachfolgende System von (gewöhnlichen) Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{22} = \beta_{22} = \gamma_{22} = 0\,; \\ \frac{d f_{40}}{d t} = \frac{d g_{40}}{d t} = \frac{d h_{40}}{d t} = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{20} &= \frac{d h_{30}}{d t}\,; & \beta_{20} &= \frac{d f_{30}}{d t}\,; & \gamma_{20} &= \frac{d g_{30}}{d t}\,; \\ \alpha_{02} &= \frac{d g_{20}}{d t}\,; & \beta_{02} &= \frac{d h_{20}}{d t}\,; & \gamma_{02} &= \frac{d f_{20}}{d t}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_{21}+\alpha_{12} &= -\frac{d g_{21}}{d t}; & \alpha_{12} &= \frac{d g_{21}}{d t}; & \alpha_{21} &= \frac{d f_{21}}{d t}; \\ \gamma_{21}+\beta_{12} &= -\frac{d h_{21}}{d t}; & \beta_{12} &= \frac{d h_{21}}{d t}; & \beta_{21} &= \frac{d g_{21}}{d t}; \\ \alpha_{21}+\gamma_{12} &= -\frac{d f_{21}}{d t}; & \gamma_{12} &= \frac{d f_{21}}{d t}; & \gamma_{21} &= \frac{d h_{21}}{d t}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

$$\beta_{11}+\gamma_{11} = \frac{d f_{11}}{d t}; \qquad \gamma_{11}+\alpha_{11} = \frac{d g_{11}}{d t}; \qquad \alpha_{11}+\beta_{11} = \frac{d h_{11}}{d t}. \tag{49}$$

$$\beta_1+\gamma_1 = \frac{d f_{10}}{d t}; \qquad \beta_2+\gamma_2 = \frac{d g_{10}}{d t}; \qquad \beta_3+\gamma_3 = \frac{d h_{10}}{d t}. \tag{50}$$

Aus den Gleichungen (48) ergibt sich leicht, daß

$$\frac{d f_{21}}{d t} = \frac{d g_{21}}{d t} = \frac{d h_{21}}{d t} = 0 \tag{51}$$

und daher

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \beta_{12} = \beta_{21} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = 0. \tag{52}$$

Andererseits erhalten wir durch Addition der drei Gleichungen (49) und Berücksichtigung von (35)

$$\alpha_{11}+\beta_{11}+\gamma_{11} = 0, \tag{53}$$

so daß die Gleichungen (49) auch in der Form

$$\alpha_{11} = -\frac{d f_{11}}{d t}, \qquad \beta_{11} = -\frac{d g_{11}}{d t}, \qquad \gamma_{11} = -\frac{d h_{11}}{d t} \tag{49'}$$

umgeschrieben werden können. Indem wir nun die Ausdrücke (47) und (49') für die nicht-verschwindenden Größen $\alpha_{20}, \beta_{20}, \gamma_{20}, \alpha_{02}, \beta_{02}, \gamma_{02}, \alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11}$ in unsere Ausdrücke (45) für $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ einsetzen, erhalten wir schließlich für diese die Lösungen

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= y\left(y\frac{d h_{30}}{d t} - x\frac{d h_{20}}{d t}\right) - z\left(x\frac{d g_{30}}{d t} - z\frac{d g_{20}}{d t}\right) - \\ &\qquad - \frac{d f_{11}}{d t} y z - \frac{1}{2}\frac{d a_0}{d t} x + \beta_3 y + \gamma_2 z + \delta_1; \\ \Delta_2 &= z\left(z\frac{d f_{30}}{d t} - y\frac{d f_{20}}{d t}\right) - x\left(y\frac{d h_{30}}{d t} - x\frac{d h_{20}}{d t}\right) - \\ &\qquad - \frac{d g_{11}}{d t} z x - \frac{1}{2}\frac{d b_0}{d t} y + \beta_1 z + \gamma_3 x + \delta_2; \\ \Delta_3 &= x\left(x\frac{d g_{30}}{d t} - z\frac{d g_{20}}{d t}\right) - y\left(z\frac{d f_{30}}{d t} - y\frac{d f_{20}}{d t}\right) - \\ &\qquad - \frac{d h_{11}}{d t} x y - \frac{1}{2}\frac{d c_0}{d t} z + \beta_2 x + \gamma_1 y + \delta_3. \end{aligned} \tag{54}$$

Aus dieser Untersuchung haben wir aber auch noch die weitere Einsicht gewonnen, daß die sechs in die Ausdrücke (40) für die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids eingehenden Größen

$$f_{21},\ g_{21},\ h_{21},\ f_{40},\ g_{40},\ h_{40},$$

die wir zunächst mit allen übrigen Koeffizienten f_{ik}, g_{ik}, h_{ik} als willkürliche Funktionen der Zeit betrachtet hatten, nach Aussage der Gleichungen (46) und (51) *Konstanten* sein müssen. Die allgemeine Lösung für die Koeffizienten a, b, c, f, g, h des Geschwindigkeitsellipsoids enthält also nicht 20, sondern höchstens 14 willkürliche Funktionen der Zeit; zu diesen kommen aber noch 6 weitere willkürliche Funktionen der Zeit, die durch die Lösungen für Δ_1, Δ_2, Δ_3 eingeführt werden und als welche wir etwa β_1, β_2, β_3, δ_1, δ_2, δ_3 wählen können, da ja die Funktionen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ durch die Relationen (50) mit den drei β und den Funktionen f_{10}, g_{10}, h_{10} zusammenhängen und also nicht mehr frei gewählt werden dürfen.

In Wirklichkeit wird die Zahl der in die Lösungen eingehenden willkürlichen Funktionen der Zeit eine noch kleinere sein, da wir bei unserer Lösung des Problems zunächst die im Gleichungssystem (III) niedergelegten Kompatibilitätsbedingungen noch ganz unberücksichtigt gelassen haben, diese aber die in dieser Lösung enthaltene Willkür noch weiter, und zwar vermutlich nicht unwesentlich, einschränken werden. Wir wollen jedoch diese Frage, der CHANDRASEKHAR in seinen Untersuchungen eine eingehende Betrachtung gewidmet hat, hier nicht erschöpfend behandeln, sondern werden sie nur an einem speziellen Beispiel beleuchten und an einer späteren Stelle noch gelegentlich streifen (s. S. 176–183, 193 ff.).

Während die Lösungen (40) für die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids unverändert, sowohl für nicht-stationäre als für stationäre Systeme gelten, mit dem einzigen Unterschiede, daß die Koeffizienten der Koordinaten x, y, z in ihnen im ersten Falle zum Teil willkürliche Funktionen der Zeit, im zweiten Falle aber alle konstant sind, nehmen die Formeln (54) der Lösung für die Bewegung des Lokalen Zentroids, wie sofort zu ersehen, für stationäre Systeme eine viel einfachere Gestalt an, indem sie sich in letzterem Falle jeweils auf die drei letzten Summanden reduzieren, in denen die Koeffizienten $\beta_i, \gamma_i, \delta_i$ nunmehr alle als Konstanten zu betrachten sind.

Ganz besonders einfach gestaltet sich die Lösung des *zweidimensionalen stationären* Problems, die wir aus unserer allgemeinen Lösung dadurch erhalten, daß wir die dritte Koordinate z sowie die Größen c, f, g und Δ_3 weglassen und alle eine Differentiation nach der Zeit enthaltenden Glieder in unseren Formeln streichen. Das Ergebnis ist:

$$
\begin{aligned}
a &= -a_0 - 2h_2 y - h_4 y^2, \\
b &= -b_0 - 2h_3 x - h_4 x^2, \\
h &= h_1 + h_2 x + h_3 y + h_4 x y
\end{aligned}
\tag{55}
$$

für die Koeffizienten a, b, h der Geschwindigkeits*ellipse* und

$$
\Delta_1 = \beta y + \delta_1, \qquad \Delta_2 = -\beta x + \delta_2; \tag{56}
$$

denn nach der letzten Gleichung (50) ist hier $\beta_3 = -\gamma_3 = \beta$.

Wir sehen, daß in dem zweidimensionalen Falle die Anzahl der Integrationskonstanten in der Lösung für die Koeffizienten der Geschwindigkeitsellipse gleich 6 ist, zu denen noch drei weitere Integrationskonstanten durch die Lösung für die Größen Δ_1, Δ_2 hinzukommen.

Wir wollen nun zur Erläuterung des von S. CHANDRASEKHAR entwickelten Verfahrens an diesem einfachen Beispiele kurz zeigen, wie die Berücksichtigung der Kompatibilitätsbedingungen (III) die in den Lösungen enthaltene Willkür noch weiter einengt, wobei wir, so weit tunlich, die einfachen Zwischenrechnungen dem Leser überlassen werden, um die Darstellung möglichst kurz und übersichtlich zu gestalten. Es werden sich hierbei die meisten der im 3. Kapitel erhaltenen Ergebnisse von J. H. OORT und B. LINDBLAD wiederfinden. Die Gruppe der Gleichungen (III) nimmt für den zweidimensionalen stationären Fall die einfache Form an:

$$
\begin{aligned}
a\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + h\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} &= -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \gamma}{\partial x}; \\
h\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} &= -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial y}; \\
\Delta_1\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \Delta_2\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} &= 0.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Wir wenden uns zuerst der Betrachtung der letzten dieser Gleichungen zu, die wir, wie bereits in (22)—(24) angedeutet, nach der LAGRANGEschen Methode lösen können. Das ihr zugeordnete System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das sich in diesem Falle auf eine einzige Gleichung reduziert, lautet, unter Berücksichtigung von (56),

$$
\frac{dx}{\beta y + \delta_1} = \frac{dy}{-\beta x + \delta_2} \qquad \text{oder} \qquad (\beta x - \delta_2)\,dx + (\beta y + \delta_1)\,dy = 0, \tag{58}
$$

deren Integral sofort in der Form

$$
I \equiv \beta(x^2 + y^2) + 2\delta_1 y - 2\delta_2 x = \text{const}. \tag{59}
$$

erhalten werden kann. Hier sind nun verschiedene Fälle zu unterscheiden. Im allgemeinsten Falle, in dem $\beta \neq 0$ ist, kann das Integral auch in der Form

$$\left(x - \frac{\delta_2}{\beta}\right)^2 + \left(y + \frac{\delta_1}{\beta}\right)^2 = \text{const.} \tag{60}$$

geschrieben werden, und wir erhalten auf Grund des JEANS-CHARLIERschen Theorems (s. Gl. (23))

$$\mathfrak{B}(x, y) \equiv \mathfrak{B}(I) \equiv \mathfrak{B}\left\{\left(x - \frac{\delta_2}{\beta}\right)^2 + \left(y + \frac{\delta_1}{\beta}\right)^2\right\}. \tag{61}$$

Die Potentialfunktion muß also in diesem Falle *Kreissymmetrie* um den Punkt $\left(x_0 = + \frac{\delta_2}{\beta}, y_0 = -\frac{\delta_1}{\beta}\right)$ besitzen. Der Fall $\beta = 0$, in dem das Potential längs eines Systems von parallelen geraden Linien konstante Werte behält, und der ganz singuläre Fall, in dem $\beta = \delta_1 = \delta_2 = 0$ ist, also beide Größen Δ_1 und Δ_2 gleich Null sind, braucht uns hier nicht näher zu beschäftigen. Wir wollen im weiteren annehmen, daß der Anfangspunkt unseres Koordinatensystems durch eine Parallelverschiebung der Achsen in den Punkt x_0, y_0 gebracht worden ist, so daß unsere Potentialfunktion nunmehr die Form hat

$$\mathfrak{B}(x, y) = \mathfrak{B}(x^2 + y^2) = \mathfrak{B}(\tau), \tag{62}$$

wo $\mathfrak{B}$ eine willkürliche Funktion ihres Argumentes bedeutet, für das wir eine neue Variable

$$\tau = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \tag{63}$$

eingeführt haben. Es ist klar, daß dann die Beziehungen bestehen

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} = \frac{d\mathfrak{B}}{d\tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} = x\frac{d\mathfrak{B}}{d\tau}; \qquad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} = \frac{d\mathfrak{B}}{d\tau}\frac{\partial \tau}{\partial y} = y\frac{d\mathfrak{B}}{d\tau}. \tag{64}$$

Setzen wir nun diese Ausdrücke in die beiden ersten Kompatibilitätsbedingungen (57) ein, und beachten, daß die partielle Derivierte der linken Seite der ersten Gleichung nach y gleich der partiellen Derivierten der linken Seite der zweiten Gleichung nach x sein muß, da sie beide gleich $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y}$ sind, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(ax + hy)\frac{d\mathfrak{B}}{d\tau}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[(hx + by)\frac{d\mathfrak{B}}{d\tau}\right]. \tag{65}$$

Da nun $a, b, h, \mathfrak{B}$ alle Funktionen von x und y sind, und ferner

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\tau}\right) = \frac{d^2\mathfrak{B}}{d\tau^2}\cdot x, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\tau}\right) = \frac{d^2\mathfrak{B}}{d\tau^2}\cdot y$$

ist, ergibt sich nach einer ganz elementaren Umrechnung

$$\frac{\frac{d^2\mathfrak{B}}{d\tau^2}}{\frac{d\mathfrak{B}}{d\tau}} = \frac{x\left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}\right)}{(b-a)xy + h(x^2 - y^2)} = S, \tag{66}$$

wo für S mit Hilfe der Formeln (55) der einfache Ausdruck

$$S = 3 \cdot \frac{h_3 y - h_2 x}{h(x^2 - y^2) + xy(b-a)} \tag{67}$$

erhalten wird.

Hier sind nun die zwei wichtigen Fälle zu unterscheiden, nämlich I. daß die Kompatibilitätsbedingungen identisch erfüllt sind und das Potential daher, außer der Bedingung der Kreissymmetrie (oder der übrigen aus (59) folgenden Bedingungen), keinerlei weiteren Einschränkungen unterworfen ist, und II. daß die Kompatibilitätsbedingungen nicht identisch erfüllt sind, woraus sich weitere Bindungen für die Potentialfunktion ergeben. Im ersten Falle muß der Ausdruck S die unbestimmte Form $0/0$ annehmen, im zweiten Falle müssen wir mindestens verlangen, daß S eine reine Funktion der Variablen τ sei, da ja die linke Seite der Gleichung (66) eine reine Funktion dieser Variablen ist.

Fall I: Damit S die unbestimmte Form $0/0$ erhält, müssen die zwei nachfolgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$h_3 y - h_2 x = 0 \tag{68}$$

und

$$h(x^2 - y^2) + xy(b-a) = 0. \tag{69}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt unmittelbar $h_2 = h_3 = 0$, und unsere Ausdrücke (55) für die Koeffizienten der Geschwindigkeitsellipse vereinfachen sich nun zu

$$a = -a_0 - h_4 y^2; \quad b = -b_0 - h_4 x^2; \quad h = h_1 + h_4 xy. \tag{70}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (69) erhalten wir weiter, da sich die Glieder mit h_4 gegenseitig wegheben

$$h_1(x^2 - y^2) + xy(a_0 - b_0) = 0, \tag{71}$$

was nur in dem Falle möglich ist, wenn $h_1 = 0$, $a_0 = b_0 =$ einer und derselben Konstanten $-k_1$ sind. Indem wir noch $h_4 = -k_2$ setzen, erhalten wir nun für die Koeffizienten der Geschwindigkeitsellipse die überaus einfachen, nur noch von *zwei* willkürlichen Konstanten abhängenden Lösungen

$$a = k_1 + k_2 y^2; \quad b = k_1 + k_2 x^2; \quad h = -k_2 xy, \tag{72}$$

während die Größen Δ_1, Δ_2 bei der von uns hier getroffenen Wahl des Anfangspunktes des Koordinatensystems, einfach gleich

$$\Delta_1 = \beta y, \quad \Delta_2 = -\beta x \tag{73}$$

werden, und die Komponenten X_0, Y_0 der Geschwindigkeit des Lokalen Zentroids aus den für den zweidimensionalen Fall spezialisierten Gleichungen (41)

$$aX_0 + hY_0 = \Delta_1 = \beta y,$$
$$hX_0 + bY_0 = \Delta_2 = -\beta x \tag{74}$$

erhalten werden. Der die in unserem System an jeder Stelle herrschende Geschwindigkeitsverteilung bestimmende quadratische Ausdruck (3) hat nun in zwei Dimensionen und unter Benutzung der oben angegebenen Ausdrücke für seine Koeffizienten a, b, h die Gestalt

$$\begin{aligned} Q = a(X - X_0)^2 + b(Y - Y_0)^2 + 2h(X - X_0)(Y - Y_0) = \\ = (k_1 + k_2 y^2)u^2 + (k_1 + k_2 x^2)v^2 - 2k_2 xy \cdot uv, \end{aligned} \tag{75}$$

wo $X - X_0 = u$, $Y - Y_0 = v$ die Komponenten der relativen Geschwindigkeit eines Sterns in dem lokal ruhenden Koordinatensystem (also bezogen auf das Lokale Zentroid) bedeuten. Betrachten wir nun die durch (75) definierte Geschwindigkeitsverteilung in irgend einem Punkte x, y unseres zweidimensionalen Sternsystems. Der Winkel ε, den eine Hauptachse der Ellipse Q = const. mit der positiven X-Achse bildet, wird bekanntlich durch

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{2h}{a - b} \tag{76}$$

gegeben, oder indem wir für a, b, h ihre Werte aus (72) einsetzen und den durch $\operatorname{tg}\vartheta = y/x$ definierten Winkel ϑ, den der Radius Vektor des Punktes x, y mit der positiven X-Achse bildet, einführen

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2\operatorname{tg}\vartheta}{1 - \operatorname{tg}^2\vartheta} = \operatorname{tg} 2\vartheta. \tag{77}$$

Hieraus ergibt sich

$$\varepsilon = \vartheta \pm \pi \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \vartheta \pm \frac{\pi}{2}, \tag{78}$$

d. h. daß *die Hauptachsen der Geschwindigkeitsellipse in jedem Punkte längs dem Radiusvektor und senkrecht zu ihm gerichtet sind*. Es findet also *keine «Abweichung des Vertex»* von der Richtung nach dem Mittelpunkte des Systems statt.

Das Verhältnis der Achsen der Geschwindigkeitsellipse kann nun auch sofort bestimmt werden. Nach einem bekannten Theorem der analytischen Geometrie müssen die Längen l der beiden Halbachsen der Ellipsen (75), als Extremalwerte, durch die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\frac{1}{l^4} - (a + b)\frac{1}{l^2} + (ab - h^2) = 0 \tag{79}$$

gegeben sein. Lösen wir diese Gleichung nach l^2 auf und setzen die Werte (72) für a, b, h ein, so erhalten wir

$$l_1^2 = \frac{1}{k_1}; \quad l_2^2 = \frac{1}{k_1 + k_2(x^2 + y^2)}; \quad \frac{l_2}{l_1} = \sqrt{\frac{k_1}{k_1 + k_2(x^2 + y^2)}}. \tag{80}$$

Was nun die Bewegung des Lokalen Zentroids betrifft, so erhalten wir deren Komponenten X_0 und Y_0 durch Auflösung der Gleichungen (74) und Einsetzen der Werte (72). Das Ergebnis ist

$$X_0 = \frac{\beta y}{k_1 + k_2(x^2 + y^2)} = \frac{\beta y}{k_1 + k_2\varpi^2}; \quad Y_0 = \frac{-\beta x}{k_1 + k_2(x^2 + y^2)} = -\frac{\beta x}{k_1 + k_2\varpi^2}, \tag{81}$$

wo wir für die radiale Entfernung (vom Symmetriemittelpunkte des Systems) unsere frühere Bezeichnung ϖ wieder eingeführt haben. Die radiale und transversale Komponenten, Π_0 und Θ_0, dieser Geschwindigkeit ergeben sich nun leicht zu

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= Y_0 \sin\vartheta + X_0 \cos\vartheta = \frac{1}{\varpi}(yY_0 + xX_0) = 0, \\ \Theta_0 &= Y_0 \cos\vartheta - X_0 \sin\vartheta = \frac{1}{\varpi}(xY_0 - yX_0) = -\frac{\beta\varpi}{k_1 + k_2\varpi^2}, \end{aligned} \tag{82}$$

woraus wir wiederum schließen, daß die «differentielle Bewegung» (die Bewegung der Lokalen Zentroide) *rein rotatorischen Charakter* hat und eine Expansion (oder Kontraktion) des Systems nicht stattfindet.

Schließlich läßt sich aus unseren Formeln auch die wichtige OORT-LINDBLADsche Beziehung (52) oder (53) des 3. Kapitels leicht wiedergewinnen. Aus den Beziehungen (31) und (32) des 3. Kapitels ergibt sich sofort, daß die OORTsche Rotationskonstante A auch in der Form geschrieben werden kann

$$A = \frac{\varpi}{2}\frac{\partial\omega}{\partial\varpi}. \tag{83}$$

Nun ist aber nach der zweiten Formel (82)

$$\omega = \frac{\Theta_0}{\varpi} = -\frac{\beta}{k_1 + k_2\varpi^2} \tag{84}$$

und wenn wir diesen Ausdruck in (83) einsetzen

$$\frac{A}{\omega} = -\frac{k_2\varpi^2}{k_1 + k_2\varpi^2}$$

und damit

$$1 + \frac{A}{\omega} = \frac{k_1}{k_1 + k_2\varpi^2} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 \tag{85}$$

wegen (80). Dies ist aber gerade die bekannte OORT-LINDBLADsche Relation zwischen der Konstanten A, der Winkelgeschwindigkeit und dem Achsenverhältnisse der SCHWARZSCHILDschen Streuungsellipse.

Wenn also die Kompatibilitätsbedingungen (57) *identisch* erfüllt sind, hat das System genau die von OORT und LINDBLAD vorausgesetzten Eigenschaften, die sich aber hier — im zweidimensionalen Falle — zwangsläufig aus den

drei am Anfange unserer Entwicklungen gemachten Grundannahmen (S. 157 bis 159) ergeben. Namentlich die Kreissymmetrie des Systems und die Abwesenheit einer Expansionskomponente in der Geschwindigkeit des Lokalen Zentroids, die in der OORT-LINDBLADschen Rotationstheorie der Milchstraße als Hypothesen erscheinen, können in dem hier betrachteten Falle als notwendige Folgen der drei CHANDRASEKHARschen Grundannahmen streng bewiesen werden.

Fall II: Wenn die Kompatibilitätsbedingungen (57) *nicht* identisch erfüllt sind und die Größe S daher nicht die unbestimmte Form *0/0* hat, muß von ihr, wegen (66), wenigstens verlangt werden, daß sie eine reine Funktion des einzigen, durch (63) definierten Argumentes τ sein soll, also

$$S \equiv S(\tau)\,. \tag{86}$$

In diesem Falle muß das S aber, wie sofort einzusehen ist, der Bedingung genügen

$$y\frac{\partial S}{\partial x} = x\frac{\partial S}{\partial y}\,. \tag{87}$$

Setzen wir hierin den Ausdruck (67) von S ein, indem wir die Größen a, b, h durch ihre Ausdrücke (55) ersetzen, so erhalten wir nach einer elementaren Zwischenrechnung, die hier übergangen werden kann,

$$\begin{aligned} y^3[h_2 h_1 + h_3(b_0 - a_0)] &+ h_2 h_1 x^2 y + 2h_2^2 x^3 y - 2h_1 h_3 x y^2 - 4h_2 h_3 x^2 y^2 + \\ &+ 2h_3^2 x y^3 = x^3[h_1 h_3 + h_2(a_0 - b_0)] + h_3 h_1 y^2 x + \\ &+ 2h_3^2 y^3 x - 2h_1 h_2 x^2 y - 4h_2 h_3 x^2 y^2 + 2h_2^2 y x^3, \end{aligned} \tag{88}$$

einen Ausdruck, in dem sich die mit x^3y, x^2y^2 und xy^3 multiplizierten Terme gegenseitig aufheben. Indem wir die Koeffizienten der Terme mit x^3, y^3, x^2y und xy^2 einzeln gleich Null setzen, erhalten wir das nachfolgende System von Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} h_1 h_2 + h_3(b_0 - a_0) = 0; \quad h_1 h_3 = 0\,, \\ h_1 h_3 + h_2(a_0 - b_0) = 0; \quad h_1 h_2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Diese Bedingungen lassen sich nun auf *zwei* verschiedene Weisen, und nur auf diese, befriedigen, nämlich:

entweder durch die Annahmen:

$$h_1 = 0,\; a_0 = b_0, \quad h_2 \text{ und } h_3 \text{ willkürlich} \qquad (\text{Fall II}_1)$$

oder durch die Annahmen:

$$h_1 \neq 0,\; h_2 = h_3 = 0, \quad a_0 \text{ und } b_0 \text{ willkürlich}\;. \qquad (\text{Fall II}_2)$$

Im Falle II_1 haben wir für die Koeffizienten der Geschwindigkeitsellipse aus den Formeln (55)

$$
\begin{aligned}
a &= -2h_2 y - h_4 y^2 - a_0 \\
b &= -2h_3 x - h_4 x^2 - a_0 \\
h &= h_2 x + h_3 y + h_4 x y
\end{aligned}
\tag{90}
$$

ein Formelsystem, in dem nur noch ***vier*** willkürliche Konstanten auftreten. Setzen wir diese Ausdrücke für a, b, h in den Ausdruck (67) für S ein, dann nimmt letzterer die sehr einfache Form an

$$
S = -\frac{3}{x^2 + y^2} = -\frac{3}{2\tau}. \tag{91}
$$

Die Gleichung (66) läßt sich nun aber unschwer integrieren, denn es ist

$$
\frac{\dfrac{d^2\mathfrak{V}}{d\tau^2}}{\dfrac{d\mathfrak{V}}{d\tau}} = -\frac{3}{2\tau} \qquad \text{und daher} \qquad \frac{d\mathfrak{V}}{d\tau} = \frac{\text{const}}{\tau^{\frac{3}{2}}}
$$

oder indem wir für τ seinen Wert (63), $\tau = \dfrac{\varpi^2}{2}$, einführen (also $d\tau = \varpi\, d\varpi$)

$$
\frac{d\mathfrak{V}}{d\varpi} = \frac{\text{const}}{\varpi^2}. \tag{92}
$$

In dem hier betrachteten Falle haben wir es also mit einem ***invers-quadratischen Kraftgesetze*** zu tun.

Im Falle II_2 nehmen die Ausdrücke für die Koeffizienten der Geschwindigkeitsellipse (55) die Form an

$$
\begin{aligned}
a &= -h_4 y^2 - a_0 \\
b &= -h_4 x^2 - b_0 \\
h &= h_1 + h_4 x y\ ,
\end{aligned}
\tag{93}
$$

die ebenfalls ***vier*** Integrationskonstanten enthält. Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (67) ergibt sich sofort $S = 0$, und daher wie oben

$$
\frac{d^2\mathfrak{V}}{d\tau} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d\mathfrak{V}}{d\tau} = \text{const.}
$$

oder nach Einführung von ϖ

$$
\frac{d\mathfrak{V}}{d\varpi} = \text{const.}\ \varpi, \tag{94}
$$

woraus zu ersehen ist, daß in diesem Falle das Kraftfeld ein sog. ***quasi-clastisches*** ist.

In den beiden Spezialfällen II_1 und II_2, in denen die Kompatibilitätsbedingungen ***nicht*** identisch erfüllt sind, muß also die Potentialfunktion $\mathfrak{V}$ zwei genau vorgeschriebene Formen erhalten, die dem invers-quadratischen und dem quasi-elastischen Kraftfelde entsprechen. Durch Einsetzen der Ausdrücke (90) bzw. (93) in die Formel (76) läßt sich ferner leicht zeigen, daß in diesen beiden Fällen der Winkel ε, den eine Hauptachse der Ellipse $Q =$

const. mit der positiven X-Achse bildet, keineswegs immer gleich dem vom Radiusvektor mit dieser Achse gebildeten Winkel $\left(\text{evtl.} \pm \pi \text{ oder } \pm \frac{\pi}{2}\right)$ ist; die Hauptrichtungen der «Sternströmung» sind also im allgemeinen weder radial noch tangential gerichtet, d. h. daß wir in diesen beiden Fällen ***Abweichungen des Vertex von der radialen Richtung*** haben (s. Fußnote[16]) auf S. 127).Ebenso ließe sich unter Benutzung der Formeln (74) und (82) leicht zeigen, daß die radiale Komponente der Geschwindigkeit des Lokalen Zentroids Π_0, in den beiden hier betrachteten Sonderfällen nicht $= 0$, die differentielle Bewegung daher nicht als aus einer reinen Rotation bestehend aufzufassen ist. Die auf diese Spezialfälle bezüglichen Ergebnisse sind von O. Heckmann[7]) und B. Lindblad[8]) in etwas weniger allgemeiner Form bereits 1935 gelegentlich einer Kritik einer Arbeit von S. Shiveshwarkar[9]) erhalten worden, jedoch hielten beide Autoren mit Recht einen so spezialisierten Ansatz für das Potential nicht für eine befriedigende Erklärung der im galaktischen System beobachteten Abweichung des Vertex der Sternströmung von der Richtung auf den Systemmittelpunkt (vgl. S. 127).

Die auf S. 176—183 wiedergegebenen einfachen Überlegungen stellen gewissermaßen einen Rekurs auf ein bereits in früheren Kapiteln behandeltes Gebiet dar; wir haben ihre Wiedergabe trotzdem als nützlich erachtet, und zwar gerade aus dem Grunde, weil an ihnen besonders einfach das Arbeiten mit den Kompatibilitätsbedingungen, das einen so wesentlichen Teil aller Untersuchungen S. Chandrasekhars bildet, studiert werden kann, wobei der Umstand, daß wir in dem oben betrachteten allereinfachsten, zweidimensionalen Falle aus diesen Bedingungen so viele bereits früher besprochene Eigenschaften des Systems wiedergewinnen, zum Verständnisse ihrer Bedeutung nicht unwesentlich beitragen dürfte. Wir sehen z. B. in diesem Falle, daß die allgemeine Lösung (55) für die Koeffizienten der Geschwindigkeitsellipse ***sechs*** Integrationskonstanten enthält, deren Anzahl aber durch die Notwendigkeit der Erfüllung der Kompatibilitätsbedingungen ***herabgesetzt*** wird, und zwar in der folgenden Weise: wenn die Bedingungsgleichung (67) ***identisch*** erfüllt sein soll, und das Potential daher keinerlei Einschränkungen unterworfen wird, dann stehen nur ***zwei*** Integrationskonstanten zur Verfügung (Lösung (72)); wenn dagegen die Gleichung (67) ***nicht identisch*** erfüllt ist, dann sind nur gewisse ausgezeichnete Formen für die Potentialfunktion zulässig, und die Anzahl der in die Lösung für die Koeffizienten der Geschwindigkeitsellipse eingehenden willkürlichen Integrationskonstanten ***erhöht sich*** auf ***vier***. Durch diesen Umstand erklärt sich auch die Tatsache, daß die Geschwindigkeitsverteilung in diesen speziellen Fällen weni-

---

[7]) M. N. *96*, p. 67, 1936. [8]) M. N. *96*, p. 69, 1936. [9]) M. N. *95*, p. 655, 1935.

ger stark gebunden ist, als im allgemeinen Falle, was sich in der Möglichkeit des Auftretens einer Vertexabweichung sowie einer galaktischen Expansionskomponente äußert, die beide bei *beliebiger* Form der Potentialfunktion nicht zulässig wären.

Es würde an dieser Stelle zu weit führen, wollten wir die von S. CHANDRASEKHAR auch nur für den zweidimensionalen Fall durchgeführte Untersuchung in voller Ausführlichkeit (die weiteren Spezialfälle $\beta = 0$ und $\beta = \delta = \delta_2 = 0$) wiedergeben, und es muß daher wegen allem weiteren auf die Originalarbeit verwiesen werden. Ebenso können auch gewisse von ihm für das dreidimensionale Sternsystem abgeleiteten Sätze, von denen wir im weiteren keinen Gebrauch machen wollen, trotz ihres theoretischen Interesses, hier nur genannt werden. Das bedeutendste Ergebnis ist wohl der auf S. 45 bis 54 der ersten Abhandlung (Ap. J. 90, 1939) geführte Beweis, daß ein stationäres System mit differentiellen Bewegungen notwendig *helikale Symmetrie* aufweisen muß, d. h. daß das Potential eines solchen Systems längs den um eine gewisse im Raume feststehende Achse gezogenen *Schraubenlinien* konstante Werte behält. Wenn der Gang dieser Schraubenlinien gleich Null wird, ergibt sich das *achsensymmetrische* System als Spezialfall des schraubensymmetrischen. Zum Schlusse darf noch, ebenfalls ohne näheres Eingehen auf Einzelheiten, erwähnt werden, daß die von CHANDRASEKHAR gefundenen allgemeinen Lösungen für die Koeffizienten a, b, c, f, g, h des Geschwindigkeitsellipsoids viel mehr Konstanten enthalten, als die von J. H. JEANS und A. S. EDDINGTON für Sternsysteme ohne differentielle Bewegung angegebenen, nämlich zwanzig statt fünfzehn bzw. drei. Im Anschlusse hieran hat CHANDRASEKHAR den von EDDINGTON eingeführten Begriff der «Hauptgeschwindigkeitsflächen» einer Kritik unterworfen und gezeigt, daß es solche im allgemeinen nicht geben wird, und daß die Beschränkung auf die Betrachtung von Sternsystemen, in denen sie vorhanden sind, eine Auswahl nach rein mathematischen Kriterien bedeutet, die keiner sinnvollen Einteilung der Systeme nach ihrer physikalischen Beschaffenheit zu entsprechen braucht (s. a. a. O. S. 42, 43).

Der Gabelungspunkt in der Sequenz der Außergalaktischen Nebel

Wir gehen nun dazu über, die erste praktische Anwendung der im vorhergehenden Abschnitte entwickelten allgemeinen Theorie zu machen und wollen zunächst die Reihe der mit den Grundannahmen dieser Theorie verträglichen *stationären ellipsoidischen Sternsysteme* durchnehmen und zusehen, ob wir hierbei nicht, bei zunehmender Abplattung, auf Gebilde stoßen, die sich durch Eigenschaften auszeichnen, aus denen sich auf besonders kritische, eine Instabilität begünstigende Verhältnisse in ihrem Innern schließen

läßt. Da wir uns im Verlaufe dieser Untersuchung hauptsächlich mit *achsensymmetrischen* Systemen zu beschäftigen haben werden, ist das Koordinatensystem, das sich zur Durchführung der einschlägigen Rechnungen von selbst empfiehlt, natürlich das *zylindrische,* wobei wir, wie schon oft in unseren früheren Betrachtungen, die Symmetrieachse des Sternsystems zur Z-Achse unseres zylindrischen Koordinatensystems wählen und die polaren Koordinaten in der zu ihr senkrechten Ebene (Achsenabstand und Azimutwinkel) wie früher mit ϖ und ϑ bezeichnen werden. Wir setzen dementsprechend nun

$$\lambda = \varpi \qquad \mu = \vartheta \qquad \nu = z \tag{95}$$

und haben in diesem Falle nach den Beziehungen (155) und (156) des 2. Kapitels

$$P = 1 \qquad Q = \varpi \qquad R = 1 \tag{96}$$

zu setzen. Um nun in den Besitz der allgemeinen Lösung für die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids a, b, c, f, g, h und die den Bewegungszustand der Lokalen Zentroide bestimmenden Größen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ in zylindrischen Koordinaten zu gelangen, die natürlich die Grundlage unserer weiteren Entwicklungen bilden sollen, ebenso wie uns die Formeln (40) und (54) beim Gebrauche eines Cartesischen Koordinatensystems als Ausgangspunkt gedient haben, müßten wir entweder das von S. CHANDRASEKHAR (s. S. 164) abgeleitete System von Differentialgleichungen in den allgemeinen orthogonalen Variablen λ, μ, ν durch die Bedingungen (96) für Zylinderkoordinaten spezialisieren oder durch Einsetzen der Werte (95) und (96) in die Grundgleichung (16) und Nullsetzen der Koeffizienten der verschiedenen Kombinationen Λ^i, M^j, N^k direkt ableiten. Dieses spezialisierte Gleichungssystem müßte dann, ähnlich wie das System (I), (II) gelöst werden. Da die hierbei durchzuführenden Rechnungen, trotz ihrer Weitläufigkeit, keinerlei theoretische Schwierigkeiten bieten und keine neuen prinzipiellen Einsichten in das zur Behandlung stehende Problem gewähren, wollen wir hier das Differentialgleichungssystem in zylindrischen Koordinaten weder ableiten noch lösen, sondern uns mit der bloßen Wiedergabe der von S. CHANDRASEKHAR erhaltenen Lösung begnügen; der sich für die Einzelheiten dieser Rechnung interessierende Leser findet sie auf den S. 112 — 119 der bereits öfter zitierten ersten Abhandlung von S. CHANDRASEKHAR (Ap. J. *90,* 1939). Dagegen wollen wir das System (III) der «Kompatibilitätsbedingungen», das bei unseren weiteren Betrachtungen eine zentrale Rolle zu spielen haben wird, in Zylinderkoordinaten umschreiben, was um so leichter geschehen kann, als wir es auf S. 166 bereits in vektorieller (also von der Wahl des Koordinatensystems unabhängiger) Form dargestellt hatten. Um das für unseren gegenwärtig zur Behandlung stehenden Fall gel-

tende System (III) zu erhalten, müssen wir nur beachten, daß die Komponenten des Gradienten in Zylinderkoordinaten natürlich durch

$$\frac{\partial}{\partial \varpi}, \qquad \frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial \vartheta}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}$$

gegeben werden, und ferner, da wir hier nur die stationären Fälle betrachten wollen, alle in den Gleichungen (III) vorkommenden zeitlichen Derivierten zu streichen sind. Das Ergebnis ist

$$\left.\begin{aligned}
a\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \varpi} + h\frac{1}{\varpi}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \vartheta} + g\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial \varpi}; && (1)\\
h\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \varpi} + b\frac{1}{\varpi}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \vartheta} + f\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\varpi}\frac{\partial \chi}{\partial \vartheta}; && (2)\\
g\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \varpi} + f\frac{1}{\varpi}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \vartheta} + c\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial z}; && (3)\\
\Delta_1\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \varpi} + \Delta_2\frac{1}{\varpi}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \vartheta} + \Delta_3\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} &= 0. && (4)
\end{aligned}\right\} \quad \text{(III')}$$

Andererseits ist die obenerwähnte CHANDRASEKHARsche Lösung für die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids, die wir hier, wie erwähnt, ohne Ableitung übernehmen wollen, durch das Formelsystem gegeben

$$\left.\begin{aligned}
a &= h_5 \sin 2\vartheta - h_6 \cos 2\vartheta + a_1,\\
b &= -2(h_3 \sin\vartheta - h_4 \cos\vartheta)\varpi - (h_5 \sin 2\vartheta - h_6 \cos 2\vartheta) + b_{20}\varpi^2 + a_1,\\
c &= (h_{52} \sin 2\vartheta - h_{62} \cos 2\vartheta + a_{12})\varpi^2 - 2(\gamma_1 \cos\vartheta + \gamma_2 \sin\vartheta)\varpi + c_{10},\\
f &= -[(h_{52}\cos 2\vartheta + h_{62}\sin 2\vartheta)\varpi + (\gamma_1 \sin\vartheta - \gamma_2\cos\vartheta)]\cdot z -\\
&\quad - (h_{31}\cos\vartheta + h_{41}\sin\vartheta)\varpi^2 - \tfrac{1}{2}(h_{51}\cos 2\vartheta + h_{61}\sin 2\vartheta)\varpi -\\
&\quad - (\gamma_3 \sin\vartheta - \gamma_4\cos\vartheta) + f_{30}\varpi,\\
g &= [z(-h_{52}\sin 2\vartheta + h_{62}\cos 2\vartheta - a_{12}) - \tfrac{1}{2}(h_{51}\sin 2\vartheta - h_{61}\cos 2\vartheta + a_{11})]\varpi +\\
&\quad + (\gamma_1\cos\vartheta + \gamma_2\sin\vartheta)z + \gamma_3\cos\vartheta + \gamma_4\sin\vartheta,\\
h &= (h_3\cos\vartheta + h_4\sin\vartheta)\varpi + (h_5\cos 2\vartheta + h_6\sin 2\vartheta),
\end{aligned}\right\} \quad (97)$$

in dem die Größen h_3, h_4, h_5, h_6 und a_1 Funktionen von z allein sind, nämlich

$$\left.\begin{aligned}
h_3 &= h_{30} + h_{31}z,\\
h_4 &= h_{40} + h_{41}z,\\
h_5 &= h_{50} + h_{51}z + h_{52}z^2,\\
h_6 &= h_{60} + h_{61}z + h_{62}z^2,\\
a_1 &= a_{10} + a_{11}z + a_{12}z^2,
\end{aligned}\right\} \quad (98)$$

so daß wir wieder in den dreizehn Koeffizienten $h_{30}, \ldots, a_{12}$, sowie den Größen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, b_{20}, c_{10}$ und f_{30} unsere früheren zwanzig Integrationskonstanten vor uns haben.

Andererseits lautet die Lösung für die drei Größen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ die zusammen mit (97) die Geschwindigkeitskomponenten der Lokalen Zentroide bestimmen und die wir ebenfalls ohne Beweis übernehmen:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (\alpha_1 z + \beta_1)\cos\vartheta + (\alpha_2 z + \beta_2)\sin\vartheta\,, \\ \Delta_2 &= -(\alpha_1 z + \beta_1)\sin\vartheta + (\alpha_2 z + \beta_2)\cos\vartheta + p\varpi\,, \\ \Delta_3 &= -\varpi(\alpha_1\cos\vartheta + \alpha_2\sin\vartheta) + q\,, \end{aligned} \tag{99}$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, p$ und q die in die Lösung eingehenden sechs Integrationskonstanten sind.

Wir gehen nun von der vierten der Gleichungen (III') aus, die wir sofort für den uns hier allein beschäftigenden Fall *achsialer Symmetrie* spezialisieren. In diesem Falle darf das Potential natürlich nicht von der Winkelvariablen ϑ (dem Azimute) abhängen, d. h. es muß

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \vartheta} = 0 \tag{100}$$

sein, und unsere Gleichung vereinfacht sich dadurch zu

$$\Delta_1 \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \varpi} + \Delta_3 \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} = 0\,, \tag{101}$$

woraus wir unmittelbar den Schluß ziehen, daß auch das Verhältnis Δ_1/Δ_3 von ϑ unabhängig sein muß. Nun ist aber dieses Verhältnis, nach den Gleichungen (99) gleich

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_3} = \frac{z(\alpha_1\cos\vartheta + \alpha_2\sin\vartheta) + \beta_1\cos\vartheta + \beta_2\sin\vartheta}{-\varpi(\alpha_1\cos\vartheta + \alpha_2\sin\vartheta) + q}\,, \tag{102}$$

und dieser Ausdruck kann, wie leicht einzusehen, nur durch die zwei nachfolgenden alternativen Festsetzungen von ϑ unabhängig gemacht werden:

entweder:

$$q = 0\,; \qquad \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \text{irgend einer Größe, z. B. } -z_0 \tag{Fall 1}$$

oder

$$q \neq 0\,; \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0\,. \tag{Fall 2}$$

Der erste Fall führt, wie leicht einzusehen, auf ein sphärisch-symmetrisches Sternsystem. Die Ausdrücke (99) werden nämlich, mit den für diesen Fall geltenden Werten der Konstanten

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (z - z_0)(\alpha_1\cos\vartheta + \alpha_2\sin\vartheta)\,, \\ \Delta_2 &= (z - z_0)(-\alpha_1\sin\vartheta + \alpha_2\cos\vartheta) + p\varpi\,, \\ \Delta_3 &= -\varpi(\alpha_1\cos\vartheta + \alpha_2\sin\vartheta)\,, \end{aligned} \tag{103}$$

und die Gleichung (101) nimmt daher die besonders einfache Form an

$$(z - z_0)\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \varpi} - \varpi\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} = 0. \qquad (104)$$

Das zur Auflösung dieser Gleichung dienende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist nun durch die einzige Gleichung

$$\frac{d\varpi}{z - z_0} = -\frac{dz}{\varpi} \qquad (105)$$

gegeben, deren Integral natürlich sofort in der Form

$$\varpi^2 + (z - z_0)^2 = \text{const.} \qquad (106)$$

erhalten werden kann. Der allgemeinste Ausdruck für das Potential $\mathfrak{B}$ ist mithin in diesem Falle

$$\mathfrak{B}(\varpi, z) = \mathfrak{W}[\varpi^2 + (z - z_0)^2] \qquad (107)$$

eine willkürliche Funktion, die Kugelsymmetrie um den Punkt $(0, 0, z_0)$ besitzt. Dieser Fall ist von S. CHANDRASEKHAR in Polarkoordinaten, die seinem Wesen am besten entsprechen, ausführlich diskutiert worden und ist evtl. für die Theorie der kugelförmigen Sternhaufen von Bedeutung. Da wir es hier aber in erster Linie mit den *abgeplatteten* Rotationsformen der meisten elliptischen Nebel zu tun haben, wollen wir diesen Fall hier nicht weiter verfolgen.

Im zweiten der oben betrachteten Fälle nehmen die Ausdrücke für die Größen Δ_i (99) eine noch einfachere Form an, nämlich

$$\Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = p\varpi, \qquad \Delta_3 = q, \qquad (108)$$

und die Gleichung (101) reduziert sich auf

$$q \cdot \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} = 0, \qquad (109)$$

was entweder $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} = 0$, oder $q = 0$ zur Folge hat. Wir müssen hier also wieder zwei Unterfälle unterscheiden, nämlich erstens

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \varpi} \neq 0, \qquad (110)$$

in welchem Falle

$$\Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = p\varpi, \qquad \Delta_3 = q \qquad (111)$$

sind, und zweitens

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \vartheta} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \varpi} \text{ und } \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} \neq 0, \qquad (112)$$

in welchem Falle wir

$$\Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = p\varpi, \qquad \Delta_3 = 0 \qquad (113)$$

haben. Im ersten Unterfalle ist das Potential auf Zylinderflächen, die alle eine und dieselbe Achse (die Symmetrieachse des Systems) haben, konstant;

der zweite Unterfall entspricht *dem allgemeinen Falle achsialer Symmetrie,* und wir wollen uns daher im nachfolgenden ausschließlich mit ihm befassen. Für Systeme dieser Art nehmen die Kompatibilitätsbedingungen (III' 1—3) wegen (112) die vereinfachte Form an

$$
\begin{aligned}
a\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\varpi}+g\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}&=-\frac{1}{2}\frac{\partial\chi}{\partial\varpi}\,;\\
h\varpi\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\varpi}+f\varpi\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}&=-\frac{1}{2}\frac{\partial\chi}{\partial\vartheta}\,;\\
g\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\varpi}+c\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}&=-\frac{1}{2}\frac{\partial\chi}{\partial z}\,.
\end{aligned}
\tag{114}
$$

Aus diesen Gleichungen können wir nun, auch ohne jede Kenntnis der auf der rechten Seite auftretenden Funktion χ, für die Potentialfunktion $\mathfrak{V}$ drei Integrabilitätsbedingungen ableiten, indem wir beachten, daß $\frac{\partial^2\chi}{\partial\varpi\,\partial\vartheta}=\frac{\partial^2\chi}{\partial\vartheta\,\partial\varpi}$ usw. sein muß. Führen wir die entsprechenden Differentiationen der linken Seiten wirklich aus, und beachten die mit Hilfe der Ausdrücke (97) leicht nachzuprüfenden Beziehungen[10])

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial a}{\partial\vartheta}=2h-2\varpi\frac{\partial h}{\partial\varpi}, &&\frac{\partial c}{\partial\varpi}=-2\frac{\partial g}{\partial z}, &&\frac{\partial g}{\partial\vartheta}=f-\varpi\left[\frac{\partial f}{\partial\varpi}+\frac{\partial h}{\partial z}\right],\\
&\frac{\partial a}{\partial z}=-2\frac{\partial g}{\partial\varpi}, &&\frac{\partial c}{\partial\vartheta}=-2\varpi\frac{\partial f}{\partial z},
\end{aligned}
\tag{115}
$$

so erhalten wir schließlich die folgenden drei partiellen Differentialgleichungen, denen unsere Potentialfunktion $\mathfrak{V}$ im allgemeinen Falle eines *achsensymmetrischen Sternsystems* zu genügen hat:

$$
\left(h-3\varpi\frac{\partial h}{\partial\varpi}\right)\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\varpi}-\varpi\left(2\frac{\partial f}{\partial\varpi}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}=h\varpi\frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial\varpi^2}+f\varpi\frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial\varpi\,\partial z}\,;\tag{116}
$$

$$
\left(\frac{\partial g}{\partial\vartheta}-\varpi\frac{\partial h}{\partial z}\right)\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\varpi}-3\varpi\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}=h\varpi\frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial\varpi\,\partial z}+f\varpi\frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial z^2}\,;\tag{117}
$$

$$
3\frac{\partial g}{\partial\varpi}\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\varpi}-3\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}=g\left(\frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial\varpi^2}\right)+(a-c)\frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial\varpi\,\partial z}\,.\tag{118}
$$

Wenn wir, außer der achsialen Symmetrie, der Potentialfunktion $\mathfrak{V}$ keine weiteren einschränkenden Bedingungen auferlegen, ist die *allgemeine* Auflösung des obenstehenden Gleichungssystems (116)—(118) vermutlich eine recht schwierige Aufgabe; wir wollen daher die weiteren Untersuchungen nur

---

[10]) In Wirklichkeit sind diese Beziehungen fünf von den zehn von uns nicht angeführten Differentialgleichungen (I'), durch deren Auflösung das Formelsystem (97) von S. Chandrasekhar erhalten worden ist.

für den uns hier unmittelbar interessierenden Fall durchführen, daß das Potential von einem Rotationsellipsoid herrührt und daher auf einem Systeme konzentrischer Rotationsellipsoide konstante Werte behält. Bevor wir uns aber dieser speziellen Aufgabe zuwenden, wollen wir noch eine kurze Betrachtung einem anderen Spezialfalle widmen, der uns auf ein uns bereits vertrautes Gebiet zurückführt und früher abgeleitete Ergebnisse mit geringer Mühe wiederzugewinnen gestattet.

Wenn wir nämlich die Potentialfunktion zunächst *keinen* einschränkenden Bedingungen unterwerfen, können wir die Gleichungen (116)—(118) durch die folgenden Festsetzungen befriedigen:

$$f = g = h = 0\,; \qquad a = c\,. \tag{119}$$

Gehen wir mit diesen Bedingungen in die allgemeinen Ausdrücke (97) für die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids in Zylinderkoordinaten ein, so sehen wir leicht, daß nur noch drei von den zwanzig Integrationskonstanten von Null verschieden sein können, und erhalten die Ausdrücke

$$a = a_{10}\,; \qquad b = a_{10} + b_{20}\varpi^2\,; \qquad c = a_{10}\,. \tag{120}$$

Die zur Bestimmung der Komponenten der Geschwindigkeit des Lokalen Zentroids dienenden Gleichungen (10) werden nun wegen (113), (119)

$$\Delta_1 = a\Pi_0 = 0\,, \qquad \Delta_2 = b\Theta_0 = p\varpi\,, \qquad \Delta_3 = cZ_0 = 0\,, \tag{121}$$

woraus sich diese Komponenten selbst unmittelbar zu

$$\Pi_0 = 0\,, \qquad \Theta_0 = \frac{p\varpi}{a_{10} + b_{20}\varpi^2}\,, \qquad Z_0 = 0 \tag{122}$$

ergeben. Wir sehen sofort, daß wir hier wieder den Oort-Lindbladschen Fall der reinen «galaktischen Rotation» eines stationären Systems vor uns haben: die Bewegung der Lokalen Zentroide ist eine rein rotatorische, da nur die Tangentialkomponente Θ_0 ihrer Geschwindigkeiten von Null verschieden ist, ferner sind, wegen der ersten drei Bedingungen (119), die Hauptachsen des Geschwindigkeitsellipsoids nach den drei «Hauptrichtungen» des hier benutzten zylindrischen Koordinatensystems gerichtet, so daß eine «Abweichung des Vertex» nicht vorhanden ist, und schließlich sind, nach der letzten der Bedingungen (119), die längs dem Radiusvektor liegende und die zur Symmetrieachse parallele Achse des Geschwindigkeitsellipsoids einander gleich, so daß letzteres, wie es die allgemeine Theorie (s. S. 64) verlangt, Achsensymetrie um eine in die Θ-Richtung fallende Achse besitzt. Diese letzte Einschränkung läßt sich, wie aus Gleichung (118) zu ersehen, vermeiden, indem für das $\mathfrak{W}$ noch die weitere Bedingung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial \varpi \, \partial z} = 0 \tag{123}$$

eingeführt wird, die die letzte der Bedingungen (119) für die Erfüllung des Gleichungssystems (116)—(118), nämlich $a = c$, überflüssig macht. Um der Bedingung (123) zu genügen, muß aber die Potentialfunktion $\mathfrak{B}$ die Form haben

$$\mathfrak{B}(\varpi, z) = \mathfrak{B}_1(\varpi) + \mathfrak{B}_2(z),$$

wo $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ beliebige Funktionen ihrer Argumente sind. In diesem Falle besteht aber, außer den beiden Integralen I_1 und I_2 des charakteristischen Gleichungssystems (72) des 2. Kapitels, noch ein drittes Integral I_3. Es ist nämlich dann

$$\frac{dw}{dt} = \ddot{z} = -\frac{\partial \mathfrak{B}(\varpi, z)}{\partial z} = -\frac{\partial \mathfrak{B}_2(z)}{\partial z},$$

woraus sich durch Multiplikation beider Seiten mit $\dot{z}$ und Integration ergibt

$$I_3 \equiv \dot{z}^2 + 2\,\mathfrak{B}_2(z) = Z^2 + 2\,\mathfrak{B}_2(z) = \text{const}.$$

Die allgemeine Form der Verteilungsfunktion Ψ ist nun eine willkürliche Funktion der *drei* Argumente I_1, I_2, I_3, also $\Psi(I_1, I_2, I_3)$, und wir können alle Sterne nicht nur nach ihrer Energie und ihrem Drehmomente, sondern auch nach der zur Symmetrieachse parallelen Komponente (Z_0) ihrer Geschwindigkeit beim Durchqueren irgend einer Ebene $z = z_0$, z. B. der galaktischen Symmetrieebene $z = 0$, in Gruppen einteilen, zwischen denen keine Übergänge stattfinden können. Wenn $\mathfrak{B}$ nicht streng die Form $\mathfrak{B}_1(\varpi) + \mathfrak{B}_2(z)$ hat, aber die Eigenschaft besitzt, daß sich $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} = K_z$ mit ϖ nur *sehr langsam* ändert, wie das in einem so stark abgeplatteten Sternsystem, wie das Galaktische System in weiten Gebieten der Fall sein wird, dann ist $\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial \varpi \, \partial z}$ als sehr klein zu betrachten, und wir befinden uns in einem Falle, in dem auch die Beziehung $I_3 = \text{const.}$ *genähert* erfüllt sein wird. Dann erhält aber das letzte, im allgemeinen nur für $a = c$ verschwindende Glied der Gleichung (118) auch für $a \neq c$ einen sehr kleinen Wert, und es ist daher für ein solches System möglich, auch bei nicht strenger Erfüllung der Bedingung $a = c$, sich sehr nahe an einem stationären Zustande zu befinden. Wir erkennen hierin die auf Seite 126 wiedergegebene, von B. LINDBLAD vorgeschlagene Erklärung der Tatsache, daß in unserem Galaktischen System die senkrecht zur Milchstraßenebene stehende Achse des SCHWARZSCHILDschen Geschwindigkeitsellipsoids beträchtlich kürzer ist als die ungefähr nach dem Mittelpunkte des Systems weisende Achse, so daß bei diesem, als achsensymmetrisch und stationär vorausgesetzten System, im Widerspruche zu der allgemeinen Theorie, eine annähernd radiale, statt einer tangentialen Sternströmung beobachtet wird.

Nach dieser kurzen Abschweifung kehren wir nun wieder zu der uns hier in erster Linie beschäftigenden Frage der möglichen Formen «sphäroidischer» Sternsysteme zurück. Wir wollen also dementsprechend voraussetzen, *daß die Äquipotentialflächen in unseren Sternsystemen durch eine Schar konzentrischer Rotationsellipsoide gegeben werden,* was mathematisch dadurch zum Ausdrucke gebracht werden kann, daß wir die Potentialfunktion $\mathfrak{B}$ als willkürliche Funktion eines einzigen Argumentes τ, also

$$\mathfrak{B}(\varpi, z) = \mathfrak{B}(\tau) \tag{124}$$

ansetzen, wo τ durch den Ausdruck

$$\tau = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + \alpha z^2) = \tfrac{1}{2}(\varpi^2 + \alpha z^2) \tag{125}$$

gegeben wird, in dem α eine willkürliche reelle Zahl bedeutet, die wir, da wir uns nur für die *ellipsoidischen* Formen interessieren, im weiteren stets als positiv betrachten dürfen. Unsere erste Aufgabe besteht nun darin, zuzusehen, was aus unseren für jedes achsensymmetrische System geltenden Differentialgleichungen (116)—(118) — den Kompatibilitätsbedingungen — bei der oben angegebenen Spezialisierung der Funktion $\mathfrak{B}$ wird.

Aus (124) und (125) ergeben sich die verschiedenen Derivierten von $\mathfrak{B}$ nach ϖ und z leicht zu

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \varpi} = \varpi \frac{d\mathfrak{B}}{d\tau}; \qquad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} = \alpha z \frac{d\mathfrak{B}}{d\tau} \tag{126}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial \varpi^2} &= \frac{d\mathfrak{B}}{d\tau} + \varpi^2 \frac{d^2\mathfrak{B}}{d\tau^2}; \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial z^2} &= \alpha \frac{d\mathfrak{B}}{d\tau} + \alpha^2 z^2 \frac{d^2\mathfrak{B}}{d\tau^2}; \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial \varpi \partial z} &= \alpha \varpi z \frac{d^2\mathfrak{B}}{d\tau^2}. \end{aligned} \tag{127}$$

Mit diesen Werten nehmen unsere Kompatibilitätsbedingungen (116)—(118) die Form an

$$\left(3\varpi \frac{\partial h}{\partial \varpi} + 2az \frac{\partial f}{\partial \varpi} + az \frac{\partial h}{\partial z}\right) \frac{d\mathfrak{B}}{d\tau} = -\varpi (h\varpi + \alpha z f) \frac{d^2\mathfrak{B}}{d\tau^2}; \tag{128}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varpi} - \omega \frac{\partial h}{\partial z} - 3\alpha z \frac{\partial f}{\partial z} - \alpha f\right) \frac{d\mathfrak{B}}{d\tau} = \alpha z (h\varpi + \alpha z f) \frac{d^2\mathfrak{B}}{d\tau^2}; \tag{129}$$

$$\left(3\varpi \frac{\partial g}{\partial \varpi} - 3\alpha z \frac{\partial g}{\partial z} - [\alpha - 1] g\right) \frac{d\mathfrak{B}}{d\tau} = (\alpha^2 z^2 g - \varpi^2 g + [a - c]\alpha \varpi z) \frac{d^2\mathfrak{B}}{d\tau^2}. \tag{130}$$

Nun wissen wir, daß die *identische* Erfüllung dieses Gleichungssystems, bei der dem Potentiale, außer der Eigenschaft der Achsensymmetrie, keine wei-

teren Bedingungen auferlegt werden, zu dem durch die Beziehungen (120)—(122) gegebenen OORT-LINDBLADschen Fall reiner galaktischer Rotation führt, und müssen daher, wenn wir nach Sternsystemen mit anderen, neuen Eigenschaften suchen, uns der Betrachtung derjenigen Fälle zuwenden, in denen die Gleichungen (128)—(130) *nicht* identisch erfüllt sind. Auf Grund unserer früheren Erfahrungen können wir schon jetzt vermuten, daß solche Systeme durch ganz spezielle Formen der Potentialfunktion charakterisiert sein werden, und zwar daß die Spezialisierung vermutlich in dieser Beziehung noch viel weiter gehen wird, als sie durch unseren, noch eine willkürliche Funktion enthaltenden Ansatz (124) bedingt wird. Dies erweist sich in der Tat als der Fall.

Wir können zunächst ohne weiteres die Anzahl der in die allgemeinen Lösungen (97), (99) eingehenden willkürlichen Konstanten noch etwas weiter herabsetzen; hierzu bemerken wir, daß sich aus den Gleichungen (128), (129) sofort die Beziehung ergibt

$$\alpha z\left(3\varpi\frac{\partial h}{\partial\varpi}+2\alpha z\frac{\partial f}{\partial\varpi}+\alpha z\frac{\partial h}{\partial z}\right)+\varpi\left(\frac{\partial g}{\partial\vartheta}-\varpi\frac{\partial h}{\partial z}-3\alpha z\frac{\partial f}{\partial z}-\alpha f\right)=0, \quad (131)$$

die sich durch Einsetzen der Werte (97) für f, g, h leicht in

$$\begin{aligned}(\alpha-1)&(h_{31}\cos\vartheta+h_{41}\sin\vartheta)\varpi^3+4(\alpha-1)(h_{52}\cos2\vartheta+h_{62}\sin2\vartheta)\varpi z^2-\\&-3\alpha(\alpha-1)(h_{31}\cos\vartheta+h_{41}\sin\vartheta)\varpi z^2+\\&+\tfrac{1}{2}(\alpha-4)(h_{51}\cos2\vartheta+h_{61}\sin2\vartheta)\varpi^2-\alpha f_{30}\varpi^2+2\alpha^2 f_{30}z^2+\\&+\{[3\alpha h_{30}+(1-4\alpha)\gamma_2]\cos\vartheta+[3\alpha h_{40}+(4\alpha-1)\gamma_1]\sin\vartheta\}\varpi z+\\&\qquad+(\alpha-1)(\gamma_3\sin\vartheta-\gamma_4\cos\vartheta)\varpi=0\end{aligned} \quad (132)$$

verwandelt. Hier treten uns zum ersten Male gewisse kritische numerische Werte der Konstanten α entgegen, nämlich $\alpha=1$, $\alpha=4$ und $\alpha=1/4$, durch deren Wahl gewisse Koeffizienten des obenstehenden Ausdrucks zum Verschwinden gebracht werden. Die Bedeutung des ersten Wertes ist unmittelbar einleuchtend; er entspricht, wie aus (124), (125) sofort einzusehen ist, dem Falle eines *sphärisch-symmetrischen* Potentials und Sternsystems. Wir wollen aus diesem Grunde den Fall $\alpha=1$ bei unserer Untersuchung ellipsoidischer Sternsysteme, als nicht hinzugehörig, ausdrücklich ausschließen. Nun lehrt eine Betrachtung des Ausdruckes (132), daß letzterer im Falle $\alpha\neq1$ nur dann verschwinden kann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{gathered}h_{31}=h_{41}=h_{52}=h_{62}=f_{30}=\gamma_3=\gamma_4=0,\\(\alpha-4)h_{51}=(\alpha-4)h_{61}=0,\\3\alpha h_{30}=(4\alpha-1)\gamma_2,\qquad 3\alpha h_{40}=(1-4\alpha)\gamma_1,\end{gathered} \quad (133)$$

worauf Gleichung (128) die Form erhält

$$[(h_{30}\cos\vartheta + h_{40}\sin\vartheta)\varpi^2 + \alpha(\gamma_2\cos\vartheta - \gamma_1\sin\vartheta)z^2 +$$
$$+ (1 - \tfrac{1}{2}\alpha)(h_{51}\cos 2\vartheta + h_{61}\sin 2\vartheta)\varpi z + (h_{50}\cos 2\vartheta + h_{60}\sin 2\vartheta)\varpi]\frac{d^2\mathfrak{V}}{d\tau^2} =$$
$$= -3(h_{30}\cos\vartheta + h_{40}\sin\vartheta)\frac{d\mathfrak{V}}{d\tau}. \tag{134}$$

Nun ist nach unserer Voraussetzung $\mathfrak{V}$ eine reine Funktion des Argumentes τ, und es muß daher auch das Verhältnis $\frac{d^2\mathfrak{V}}{d\tau^2} \Big/ \frac{d\mathfrak{V}}{d\tau}$, das wir aus (134) bilden können, auch eine reine Funktion von $\varpi^2 + \alpha z^2$ sein und insbesondere von ϑ natürlich nicht abhängen. Dies kann nur auf den folgenden zwei Wegen erreicht werden:

entweder durch die Festsetzung:

$$h_{30} = \gamma_2; \qquad h_{40} = -\gamma_1;$$
$$(1 - \tfrac{1}{2}\alpha)h_{51} = (1 - \tfrac{1}{2}\alpha)h_{61} = h_{50} = h_{60} = 0 \tag{135}$$

oder durch die Festsetzung:

$$h_{30} = h_{40} = 0. \tag{136}$$

Im ersten Falle sehen wir, aus den beiden letzten Bedingungen (133), daß $\alpha = 1$ sein muß, so daß wir hier auf den von uns ausdrücklich ausgeschlossenen «sphärischen» Fall zurückgeführt werden.

Ganz anders liegen die Verhältnisse, wenn wir von der Festsetzung (136) ausgehen. Hier verschwindet die rechte Seite von Gleichung (134) und es muß daher, da der Koeffizient der linken Seite nicht gleich Null ist,

$$\frac{d^2\mathfrak{V}}{d\tau^2} = 0 \tag{137}$$

sein. Hierdurch wird eine ganz bestimmte Form für das Potential $\mathfrak{V}$ vorgeschrieben, denn die Lösung der Differentialgleichung (137) ist

$$\mathfrak{V} = \text{const.} + \text{const.}(\varpi^2 + \alpha z^2). \tag{138}$$

Wir haben somit für $\mathfrak{V}$ genau die Form erhalten, die das Potential bekanntlich im *Inneren eines homogenen gravitierenden Rotationsellipsoids* besitzt.

Die Kompatibilitätsbedingungen (128)—(130) nehmen für diesen Fall die viel einfachere Form an

$$3\varpi\frac{\partial h}{\partial\varpi} + 2\alpha z\frac{\partial f}{\partial\varpi} + \alpha z\frac{\partial h}{\partial z} = 0, \tag{139}$$

$$\frac{\partial g}{\partial\vartheta} - \varpi\frac{\partial h}{\partial z} - 3\alpha z\frac{\partial f}{\partial z} - \alpha f = 0, \tag{140}$$

$$3\varpi\frac{\partial g}{\partial\varpi} - 3\alpha z\frac{\partial g}{\partial z} - (\alpha - 1)g = 0, \tag{141}$$

in denen das α, unseren Voraussetzungen gemäß, eine positive, von 1 ver-

schiedene reelle Zahl bedeutet. Um die Einschränkungen, die durch die Gleichungen (139)—(141) den in die Ausdrücke (97) für f, g, h eingehenden Konstanten auferlegt werden, zu ermitteln, fangen wir mit der Gleichung (141) an, in die nur die Größe g eingeht, die wir auf Grund von (97) auch in der Form

$$g = (g_1 z + g_2)\varpi + g_3 z + g_4$$

schreiben können, wo g_1, g_2, g_3, g_4 Funktionen von ϑ allein sind. Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in (141) erhalten wir nach einfachen Umformungen

$$4(1-\alpha) g_1 \varpi z + (4-\alpha) g_2 \varpi - (4\alpha - 1) g_3 z - (\alpha - 1) g_4 = 0. \quad (142)$$

Da wir den Fall $\alpha = 1$, der auf ein sphärisch-symmetrisches Sternsystem führt, bereits aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen haben, müssen, zur Befriedigung der Beziehung (142) die nachfolgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$g_1 = g_4 = 0; \qquad (4-\alpha) g_2 = 0; \qquad (4\alpha - 1) g_3 = 0. \quad (143)$$

Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall, in dem α weder gleich 4 noch gleich 1/4 ist, sondern einen beliebigen anderen positiven Wert hat. Dann müssen auch g_2 und g_3 gleich Null sein, und wir erhalten, wenn wir die Ausdrücke für die g_i aus der Formel (97) für g entnehmen

$$h_{52} = h_{62} = a_{12} = \gamma_3 = \gamma_4 = 0; \quad (144)$$

$$h_{51} = h_{61} = a_{11} = \gamma_1 = \gamma_2 = 0. \quad (145)$$

Andererseits ergibt sich, wenn wir die Ausdrücke (97) in die Gleichung (139) einsetzen,

$$3(h_{30}\cos\vartheta + h_{40}\sin\vartheta)\varpi + 2\alpha f_{30} z + 3(1-\alpha) h_{31}\varpi z \cos\vartheta + \\ + 3(1-\alpha) h_{41}\varpi z \sin\vartheta = 0, \quad (146)$$

woraus wir den Schluß ziehen, daß auch

$$h_{30} = h_{40} = f_{30} = h_{31} = h_{41} = 0 \quad (147)$$

sein müssen. Die Heranziehung der Gleichung (140) würde keine neuen Bedingungen zu den bereits erhaltenen hinzufügen.

Wir kommen also zu dem Ergebnisse, daß in dem hier betrachteten Falle nur 5 von den in die Lösung (97), (98) eingehenden Integrationskonstanten, nämlich $h_{50}, h_{60}, a_{10}, b_{20}$ und c_{10}, von Null verschiedene Werte behalten können, weshalb die Ausdrücke für die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids nunmehr die Form annehmen

$$
\begin{aligned}
a &= h_{50}\sin 2\vartheta - h_{60}\cos 2\vartheta + a_{10}\,; \\
b &= -h_{50}\sin 2\vartheta + h_{60}\cos 2\vartheta + a_{10} + b_{20}\varpi^2\,; \\
c &= c_{10}\,; \qquad f = g = 0\,; \\
h &= h_{50}\cos 2\vartheta + h_{60}\sin 2\vartheta\,.
\end{aligned} \tag{148}
$$

Da hier $h \neq 0$ ist, haben wir eine Abweichung des Vertex von den Hauptrichtungen in der zur Symmetrieachse senkrechten $\Pi\Theta$-Ebene. Die zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten des Lokalen Zentroids dienenden Gleichungen (10) werden nun aber wegen (113) und (148)

$$
\begin{aligned}
a\Pi_0 + h\Theta_0 &= 0\,, \\
h\Pi_0 + b\Theta_0 &= p\varpi\,, \\
cZ_0 &= 0\,,
\end{aligned} \tag{149}
$$

woraus wir den wichtigen Schluß ziehen, daß in dem uns hier beschäftigenden Fall $Z_0 = 0$ ist, d. h. *die Bewegung des Lokalen Zentroids keine Z-Komponente hat,* daß sich daher alle Lokalen Zentroide also nur in Ebenen bewegen, die auf der Symmetrieachse senkrecht stehen.

Wenden wir uns nun den beiden Spezialfällen zu, in denen $\alpha = 4$ oder $= 1/4$ ist, so kommen wir auf wesentlich andere Verhältnisse.

Im Falle $\alpha = 4$ müssen g_1, g_3 und g_4, wie im allgemeinen Falle, gleich Null sein, jedoch, wie ein Blick auf die Bedingungsgleichungen (143) lehrt, nicht g_2. Wir haben also in diesem Falle an Stelle der Bedingungen (145)

$$
h_{51},\, h_{61},\, a_{11} \neq 0\,; \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = 0\,. \tag{150}
$$

Die Bedingungen (144) und (147) behalten dagegen in allen Fällen ihre Gültigkeit. Behalten wir daher die Glieder mit den Konstanten h_{51}, h_{61}, a_{11} in den Lösungen (97), (98) bei, so werden diese

$$
\begin{aligned}
a &= (h_{50} + h_{51}z)\sin 2\vartheta - (h_{60} + h_{61}z)\cos 2\vartheta + a_{10} + a_{11}z\,; \\
b &= -(h_{50} + h_{51}z)\sin 2\vartheta + (h_{60} + h_{61}z)\cos 2\vartheta + a_{10} + a_{11}z + b_{20}\varpi^2\,; \\
c &= c_{10}\,; \\
f &= -\tfrac{1}{2}(h_{51}\cos 2\vartheta + h_{61}\sin 2\vartheta)\varpi\,; \\
g &= -\tfrac{1}{2}(h_{51}\sin 2\vartheta - h_{61}\cos 2\vartheta + a_{11})\varpi\,; \\
h &= (h_{50} + h_{51}z)\cos 2\vartheta + (h_{60} + h_{61}z)\sin 2\vartheta\,.
\end{aligned} \tag{151}
$$

Im Falle $\alpha = 1/4$ sind dagegen, wie aus den Bedingungen (143) sofort hervorgeht, g_1, g_2 und g_4 notwendig gleich Null, während g_3 nicht zu verschwinden braucht. An die Stelle der Bedingungen (145) tritt also in diesem Falle

$$
h_{51} = h_{61} = a_{11} = 0\,, \qquad \gamma_1, \gamma_2 \neq 0\,, \tag{152}
$$

während die Bedingungen (144) und (147) nach wie vor erfüllt sein müssen. In diesem Falle lauten die Lösungen für die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids

$$\begin{aligned} a &= h_{50} \sin 2\vartheta - h_{60} \cos 2\vartheta + a_{10}\,; \\ b &= -h_{50} \sin 2\vartheta + h_{60} \cos 2\vartheta + a_{10} + b_{20}\varpi^2\,; \\ c &= -2(\gamma_1 \cos\vartheta + \gamma_2 \sin\vartheta)\,\varpi + c_{10}\,; \\ f &= -(\gamma_1 \sin\vartheta - \gamma_2 \cos\vartheta)\,z\,; \\ g &= (\gamma_1 \cos\vartheta + \gamma_2 \sin\vartheta)\,z\,; \\ h &= h_{50} \cos 2\vartheta + h_{60} \sin 2\vartheta\,. \end{aligned} \tag{153}$$

Die Gleichungen, aus denen die Geschwindigkeitskomponenten des Lokalen Zentroids berechnet werden können, haben in beiden hier betrachteten Spezialfällen die Form

$$\begin{aligned} a\Pi_0 + h\Theta_0 + gZ_0 &= 0\,, \\ h\Pi_0 + b\Theta_0 + fZ_0 &= p\varpi\,, \\ g\Pi_0 + f\Theta_0 + cZ_0 &= 0\,, \end{aligned} \tag{154}$$

wo für a, b, c, f, g, h im Falle $\alpha = 4$ die Ausdrücke (151), im Falle $\alpha = 1/4$ die Ausdrücke (153) eingesetzt zu denken sind. Man sieht, daß in beiden Fällen die «differentiellen Bewegungen» einen ganz allgemeinen Charakter haben und daß insbesondere die *Geschwindigkeiten der Lokalen Zentroide auch eine längs der Symmetrieachse Z gerichtete Komponente besitzen.*

Wir sind somit zu dem sehr beachtenswerten Ergebnisse gelangt, daß in der Reihe der Sternsysteme, die durch eine Potentialfunktion der Form (138), welche dem Potentiale im Innern eines homogenen Rotationsellipsoids entspricht, ausgezeichnet sind, zwei kritische Spezialfälle auftreten, nämlich die Fälle in denen das Potential entweder durch den Ausdruck

$$\mathfrak{V} = \text{const.} + \text{const.}\,(\varpi^2 + 4z^2)$$

oder durch

$$\mathfrak{V} = \text{const.} + \text{const.}\,(\varpi^2 + \tfrac{1}{4}z^2)$$

darstellbar ist, für die sich der Charakter der inneren (differentiellen) Bewegungen, im Vergleiche zu den Fällen, in denen sich das α auch nur einwenig von den beiden kritischen Werten unterscheidet, grundsätzlich ändert, und zwar in Richtung eines weniger geordneten und daher vermutlich auch weniger stabilen Zustandes. Nun wird bekanntlich im Ausdrucke (138) durch die Konstante α das Verhältnis k der beiden Achsen des Rotationsellipsoids bestimmt, und zwar sind die die Beziehung zwischen k und α herstellenden Formeln[11])

---

[11]) s. das Lehrbuch von E. J. ROUTH, A Treatise on Analytical Statics, 2, 106 – 116, Cambridge, 1922 (zitiert von S. CHANDRASEKHAR).

$$\alpha = \frac{2\vartheta}{1-\vartheta}, \tag{155}$$

wo die Hilfsgröße ϑ eine numerische Konstante darstellt, die mit k durch die Beziehungen

$$\vartheta = \frac{k^2}{k^2-1} - \frac{k^2}{(k^2-1)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \sqrt{k^2-1} \qquad (\text{für } k > 1) \tag{156}$$

und

$$\vartheta = -\frac{k^2}{1-k^2} + \frac{k^2}{(1-k^2)^{\frac{3}{2}}} \lg\left(\frac{1}{k} + \sqrt{\frac{1}{k}-1}\right) \qquad (\text{für } k < 1) \tag{157}$$

zusammenhängt. Die Berechnung von k für unsere beiden kritischen Werte von α ergibt

$$\begin{aligned} \alpha &= 4 \qquad & \vartheta &= {}^2/_3 \qquad & k &= 3{,}410\ldots. \\ \alpha &= {}^1/_4 \qquad & \vartheta &= {}^1/_9 \qquad & k &= 0{,}314\ldots. \end{aligned} \tag{158}$$

Für unsere Zwecke, nämlich zur Erklärung der Formen der außergalaktischen «elliptischen» Nebel, kommt natürlich nur der erste Fall in Frage, der einem *abgeplatteten* Rotationsellipsoide entspricht. Es ist sehr bemerkenswert, daß dieses Gebilde, das in einer Folge quasistationärer Systeme sicher einem Endpunkte in der Entwicklung entsprechen müßte, ein Achsenverhältnis besitzt, das dem für die am stärksten abgeplatteten elliptischen Nebel der Klasse *E7* (linsenförmige Nebel mit dem Achsenverhältnis etwa 3 : 1) gefundenen Werte außerordentlich nahekommt.

Ein ausführliches Eingehen auf die von S. CHANDRASEKHAR gegebene Weiterentwickelung der Theorie ellipsoidischer Sternsysteme würde über die für die vorliegende Monographie gesteckten Grenzen weit hinausführen; es kann daher an dieser Stelle nur die Aufmerksamkeit des für dieses Problem interessierten Lesers auf den Abschnitt XII der Untersuchung CHANDRASEKHARS (Ap. J. *92*, S. 523, 1940) gelenkt werden, dessen Studium jedoch einen nicht unbeträchtlichen Arbeitsaufwand erfordert. In diesem «Die Evolution Ellipsoidischer Systeme» überschriebenen Abschnitte geht der Verfasser von dem allgemeinen Ansatze für das Potential im Inneren eines homogenen Ellipsoids mit zeitlich veränderlichen Dichte und Achsenverhältnisse aus, nämlich

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}\left[\alpha_1(t)\,x^2 + \alpha_2(t)\,y^2 + \alpha_3(t)\,z^2\right] + \mathfrak{B}_0(t)\,, \tag{159}$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und $\mathfrak{B}_0$ Funktionen der Zeit allein sind, und aus dem sich der Fall des Rotationsellipsoids sowie des sphärischen Sternsystems leicht durch die Spezialisierung $\alpha_1 = \alpha_2$, bzw. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ ergibt. Im Verlaufe der Untersuchung wird auch die Frage der Stabilität eines die Form eines abgeplatteten Rotationsellipsoids mit einem in der Nähe des kritischen Wertes liegen-

den Achsenverhältnisse (also α_3/α_1 nahezu $= 4$) besitzenden Sternsystems einer eingehenden Behandlung unterzogen und gezeigt, daß ein solches System sowohl stabile als auch instabile Schwingungen um die kritischen Punkte in der $(\alpha_1\ \alpha_3)$ - Ebene (die durch die Gerade $\alpha_3 = 4\alpha_1$ gegeben sind) ausführen kann. Wenn nämlich die diese Schwingungen darstellende Kurve nicht durch den kritischen Punkt geht, ist die Schwingung immer stabil. Wenn aber die Schwingungen von α_1 und α_3 in Phase erfolgen, beschreibt der Punkt (α_1, α_3) in der (α_1, α_3) - Ebene eine durch den kritischen Punkt gehende Gerade, deren Neigung verschieden sein kann; je nach der Größe dieser Neigung können dann die Schwingungen sowohl stabil als auch instabil sein, so daß hier unter Umständen auch eine radikale Änderung in der Beschaffenheit des Systems eintreten kann, jedoch ist der die instabilen Schwingungen einschließende Winkelbereich ein verhältnismäßig schmaler, so daß im allgemeinen mit einer verhältnismäßig großen Lebensdauer der von E. HUBBLE als «Linsenförmige Nebel» bezeichneten Gebilde *E7* gerechnet werden kann. Hierdurch würde, wie S. CHANDRASEKHAR besonders hervorhebt, die Tatsache, daß diese Gebilde am Himmel bedeutend häufiger angetroffen werden, als die weniger abgeplatteten Mitglieder der Sequenz, eine ungezwungene Erklärung finden. Andererseits kann gezeigt werden, daß die *E7* Nebel für homologe Entwicklung stabil, die Nebel mit kleinerer Elliptizität dagegen instabil sind und sich daher in Richtung zunehmender Abplattung entwickeln müßten. Die Grenzstellung der Nebel der Klasse *E7* am Ende der Sequenz der Elliptischen Nebel und unmittelbar vor dem vermutlich «katastrophenartigen» Übergange zu den beiden Sequenzen der Spiralnebel wird andererseits durch die von S. CHANDRASEKHAR entdeckte Möglichkeit auch instabiler Schwingungen für diese Gebilde, wenigstens bis zu einem gewissen Grade verständlich gemacht. Einen schwachen Punkt der oben geschilderten Theorie könnte man in dem Umstande erblicken, daß sich alle besprochenen Phänomene nur in einem homogenen Ellipsoide ereignen, das eine ziemlich künstliche räumliche Dichteverteilung der Sterne darstellt; wir befinden uns hier aber an der äußersten Grenze der uns heute zur Verfügung stehenden theoretischen Erklärungsmöglichkeiten und müssen uns mit den hier gegebenen, wenn auch etwas verschwommenen Hinweisen begnügen, zumal, da wir für die allermeisten auf S. 151 ff. zusammengestellten Eigenschaften der außergalaktischen Nebel überhaupt noch keine Erklärungen besitzen.

Das Spiralenphänomen

Wir wenden uns nun der schwierigsten Frage der Theorie der Sternsysteme zu, die zusammen mit der Frage nach der Entstehung des Planetensystems und eines einzelnen Sterns zu den großen, noch nicht gelösten Pro-

blemen der modernen Astronomie gehört, nämlich zu der dynamischen Deutung des Phänomens eines *spiralförmigen Sternsystems.* Von den in neuerer Zeit vorgenommenen Lösungsversuchen dieses Problems werden wir uns hier nur mit zwei großangelegten Untersuchungen beschäftigen können, von denen eine von S. CHANDRASEKHAR herrührt und im Rahmen seiner oben kurz wiedergegebenen allgemeinen Theorie in seiner zweiten, die nicht-stationären Sternsysteme behandelnden Abhandlung (Ap. J. 92, S. 573—642, 1940) wiedergegeben ist, während die zweite, von B. LINDBLAD ausgeführte, ihre Darstellung in einer Reihe von auf verschiedene Zeitschriften verteilten Abhandlungen, von denen die ausführlichste und zunächst abschließende in Ap. J. 92, S. 1—26, enthalten ist, gefunden hat. Auch diese beiden Theorien können im Rahmen der vorliegenden Monographie nur ganz skizzenhaft und ohne Eingehen auf ihren ausführlicheren Ausbau dargestellt werden.

Den Ausgangspunkt der Betrachtungen S. CHANDRASEKHARS bildet die an sich äußerst plausible Erwägung, daß wir zur dynamischen Erklärung eines spiralförmigen Sternsystems ein von der Zeit abhängiges und wahrscheinlich ziemlich kompliziertes Potential brauchen werden. Nun besteht aber zwischen den Forderungen, die wir an das Potential und an den den Bewegungszustand des Systems charakterisierenden Geschwindigkeitskörper stellen dürfen, eine gewisse Polarität, die z. B. in unseren Betrachtungen auf S. 175—183, die sich auf ein zweidimensionales System bezogen, schon deutlich zum Ausdruck kommt: je größer die Freiheit ist, die wir der Potentialfunktion lassen, um so weniger Freiheit behalten wir in der Wahl der Geschwindigkeitsverteilung, die dort durch nur zwei frei zu wählende Integrationskonstanten gekennzeichnet wird; eine Vergrößerung der Zahl der in die Lösungen für die Koeffizienten der Geschwindigkeitsellipse eingehenden Konstanten erwies sich zwar als möglich, hatte aber eine sehr scharfe Einschränkung in der Form des Potentials zur Folge, das nun nur noch zwei analytisch genau bestimmte Formen haben durfte. Es erscheint daher zweckmäßig, bei der Untersuchung der bei spiralförmigen Sternsystemen uns entgegentretenden dynamischen Verhältnisse, dem Potentiale dadurch einen möglichst großen Spielraum einzuräumen, daß wir für die Geschwindigkeitsverteilung den denkbar speziellsten und einfachsten Ansatz machen. Dieser besteht aber augenscheinlich in der Annahme einer kugelsymmetrischen Verteilung der Geschwindigkeiten, und so gelangt CHANDRASEKHAR zu der seine Theorie beherrschenden Fragestellung nach den charakteristischen Eigenschaften der Sternsysteme mit sphärisch-symmetrischer Geschwindigkeitsverteilung, das heißt solcher Sternsysteme, deren Zustand zu jeder Zeit durch eine allgemeine Verteilungsfunktion Ψ von der Form

$$\Psi \equiv \Psi\left[k\langle (U-U_0)^2 + (V-V_0)^2 + (W-W_0)^2\rangle + \sigma\right] \qquad (160)$$

dargestellt werden kann, wo k, U_0, V_0, W_0 und σ zunächst als willkürliche Funktionen der Koordinaten x, y, z und der Zeit t zu denken sind.

Wir wollen nun die sich für diese spezielle Wahl der Verteilungsfunktion Ψ aus unserer allgemeinen Theorie ergebenden Eigenschaften des Sternsystems ableiten. Für die Koeffizienten des Geschwindigkeitsellipsoids haben wir in diesem Falle definitionsmäßig

$$a = b = c = k(t), \qquad f = g = h = 0, \tag{161}$$

und wenn wir diesen Ansatz mit der allgemeinen Lösung (40) vergleichen, sehen wir sofort, daß alle Koeffizienten f_{ik}, g_{ik}, h_{ik}, die im hier behandelten nicht-stationären Falle zunächst als willkürliche Funktionen der Zeit zu betrachten sind, für ein durch die Verteilungsfunktion (160) charakterisiertes Sternsystem verschwinden müssen, während die von Null verschiedenen Zeitfunktionen a_0, b_0, c_0 hier untereinander alle gleich, und zwar gleich $k(t)$ sind. Wenden wir uns nun den Lösungen (54) für die Größen Δ zu, so sehen wir, daß sie sich nun auf die letzten vier Summanden reduzieren, und ferner, daß auf Grund der Beziehungen (50),

$$\gamma_1 = -\beta_1, \qquad \gamma_2 = -\beta_2, \qquad \gamma_3 = -\beta_3$$

sind. Setzen wir die auf diese Weise spezialisierten Ausdrücke für die Δ in (41) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= kX_0 = \frac{1}{2}\frac{dk}{dt}x + \beta_3 y - \beta_2 z + \delta_1; \\ \Delta_2 &= kY_0 = \frac{1}{2}\frac{dk}{dt}y + \beta_1 z - \beta_3 x + \delta_2; \\ \Delta_3 &= kZ_0 = \frac{1}{2}\frac{dk}{dt}z + \beta_2 x - \beta_1 y + \delta_3. \end{aligned} \tag{162}$$

Wir sehen hieraus zunächst, daß in dem uns interessierenden Falle die Komponenten X_0, Y_0, Z_0 der Geschwindigkeit des Lokalen Zentroids einfach proportional zu den entsprechenden Komponenten des durch die drei Funktionen Δ_1, Δ_2, Δ_3 definierten Vektors Δ sind. Da auch die Funktionentripel β_1, β_2, β_3 und δ_1, δ_2, δ_3 zwei räumlich konstante, aber zeitlich veränderliche Vektoren β und δ definieren, lassen sich die drei Gleichungen (162) leicht zu einer einzigen vektoriellen Gleichung

$$\Delta = \frac{1}{2}\frac{dk}{dt}\mathfrak{r} + [\mathfrak{r}\cdot\beta] + \delta \tag{163}$$

zusammenfassen. Schließlich schreiben wir noch die im System (111) in Vektor-, bzw. Tensorform zusammengefaßten Kompatibilitätsbedingungen (s. auch Gleichungen (19)—(21)) in der speziellen für unseren Fall geltenden Gestalt um und erhalten

$$k \operatorname{grad} \mathfrak{V} + \frac{\partial \Delta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \operatorname{grad} \chi \tag{164}$$

und

$$(\Delta \cdot \operatorname{grad} \mathfrak{V}) = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \tag{165}$$

wo nun

$$-\chi = k(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) + \sigma = Q_0 + \sigma \tag{166}$$

ist.

Wir fangen damit an, daß wir auf Grund der oben angeschriebenen allgemeinen Beziehungen ein einfaches Theorem über die Beschaffenheit der Bewegung der Lokalen Zentroide in einem Sternsystem der hier betrachteten Art ableiten. Zu diesem Zwecke bilden wir die Rotation der in dem Ausdrucke (164) auftretenden Vektoren und erhalten, da die Rotation eines Gradienten gleich Null ist,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \Delta) = 0. \tag{167}$$

Bilden wir aber andererseits $\operatorname{rot} \Delta$ auf Grund des Ausdruckes (163), so ergibt die einfache Rechnung, wenn man bedenkt, daß die Komponenten β_1, β_2, β_3 und δ_1, δ_2, δ_3 reine Funktionen der Zeit sind,

$$\operatorname{rot}_x \Delta = -2\beta_1; \qquad \operatorname{rot}_y \Delta = -2\beta_2; \qquad \operatorname{rot}_z \Delta = -2\beta_3 \tag{168}$$

und daher

$$\operatorname{rot} \Delta = -2\beta.$$

Aus (167) und (168) folgt aber unmittelbar

$$\frac{d\beta}{dt} = 0, \tag{169}$$

d. h., daß β *ein auch zeitlich konstanter Vektor ist.* Im Lichte dieser Erkenntnis können wir nun den drei Bestandteilen, aus denen sich nach (163) der Vektor Δ, und somit nach (162) auch die Bewegung des Lokalen Zentroids, zusammensetzt, eine einfache Deutung geben. Der erste Term entspricht einer radialgerichteten, also Expansions- oder Kontraktionsgeschwindigkeit P

$$kP = \frac{1}{2} \frac{dk}{dt} r, \tag{170}$$

der zweite Term — einer Rotationsgeschwindigkeit Θ_0 um eine durch den Anfangspunkt gehende und zu β parallele feste Achse

$$k\Theta_0 = -|\beta| \cdot \varpi, \tag{171}$$

wo ϖ den senkrechten Abstand des betrachteten Punktes des Systems von dieser Achse bedeutet, und der dritte Term — einer allen Systempunkten gemeinsamen Translationsgeschwindigkeit. Unser Theorem lautet dementsprechend:

In einem durch sphärische Verteilung der Restgeschwindigkeiten ausgezeichneten Sternsystem läßt sich die Bewegung der Lokalen Zentroide durch die Superposition von drei Geschwindigkeiten darstellen, nämlich einer Expansion oder Kontraktion um einen festen Anfangspunkt, die proportional zu dem Abstande von diesem Anfangspunkte ist, einer Drehung um eine durch diesen Anfangspunkt hindurchgehende feste Achse, die dem Abstande von dieser Achse proportional ist, und schließlich noch einer allgemeinen Translation.

Da es uns an dieser Stelle nicht darum geht, eine erschöpfende Darstellung aller sich hier bietenden theoretischen Möglichkeiten zu geben, sondern nur einen Einblick in die Art und Weise, auf die ein Spiralenphänomen überhaupt zustande kommen kann, zu gewinnen, wollen wir unsere weiteren Ausführungen auf den augenscheinlich einfachsten Fall beschränken, in dem der dritte Term in der Geschwindigkeit des Lokalen Zentroids verschwindet, eine allgemeine (zeitlich veränderliche) Translation des betrachteten Sternsystems also nicht stattfindet. Unter dieser einschränkenden Voraussetzung, deren mathematischer Ausdruck natürlich

$$\delta \equiv 0 \tag{172}$$

ist, wollen wir die angefangene Durchrechnung des Systems zu Ende führen und die uns noch fehlenden Ausdrücke für die Funktionen χ und σ ableiten.

Aus Gleichung (164) ergibt sich, wenn wir in ihr den durch (163) gegebenen Wert von $\varDelta$ (nach Streichung des letzten Terms) einsetzen

$$-\frac{1}{2}\operatorname{grad}\chi = k\operatorname{grad}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\frac{d^2 k}{dt^2}\cdot\mathfrak{r} \tag{173}$$

und da

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 k}{dt^2}\cdot\mathfrak{r} = \operatorname{grad}\frac{1}{4}\frac{d^2 k}{dt^2}r^2$$

ist, erhalten wir durch Integration der in (173) enthaltenen drei Differentialgleichungen

$$-\frac{1}{2}\chi = k\,\mathfrak{B} + \frac{1}{4}\frac{d^2 k}{dt^2}\cdot r^2 - \frac{1}{2}\chi_0(t), \tag{174}$$

wo $\chi_0(t)$ eine additiv hinzutretende zunächst willkürliche Funktion der Zeit bedeutet. Durch Differentiation dieser Gleichung nach t ergibt sich sofort

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\chi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(k\,\mathfrak{B}) + \frac{1}{4}\frac{d^3 k}{dt^3}r^2 - \frac{1}{2}\frac{d\chi_0}{dt}. \tag{175}$$

Indem wir den Ausdruck für $\frac{\partial\chi}{\partial t}$ der Gleichung (165) entnehmen und in (175) einsetzen, erhalten wir

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d\chi_0}{dt} = \varDelta\cdot\operatorname{grad}\mathfrak{B} + \frac{\partial}{\partial t}(k\,\mathfrak{B}) + \frac{1}{4}\frac{d^3 k}{dt^3}r^2. \tag{176}$$

Nun läßt sich aber zeigen, daß die rechte Seite der obenstehenden Gleichung identisch verschwindet, unsere willkürliche Funktion $\chi_0(t)$ der Zeit somit eine *Konstante* ist. Aus den Kompatibilitätsbedingungen (164), (165) ergibt sich nämlich sofort die Beziehung

$$\operatorname{grad}(\Delta \cdot \operatorname{grad} \mathfrak{V}) + \frac{\partial}{\partial t}(k \operatorname{grad} \mathfrak{V}) + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = 0\,, \tag{177}$$

aus der wir durch Einsetzen des um das δ gekürzten Ausdruckes (163) für Δ unmittelbar erhalten (da β von der Zeit nicht abhängt)

$$\operatorname{grad}(\Delta \cdot \operatorname{grad} \mathfrak{V}) + \frac{\partial}{\partial t}(k \operatorname{grad} \mathfrak{V}) + \frac{1}{2}\frac{d^3 k}{d t^3}\mathfrak{r} = 0\,,$$

ein Ausdruck, der sich nach dem Vorbilde des Überganges von (173) zu (174) auch in der Form

$$\operatorname{grad}\left\{\Delta \cdot \operatorname{grad} \mathfrak{V} + \frac{\partial}{\partial t}(k \mathfrak{V}) + \frac{1}{4}\frac{d^3 k}{d t^3} r^2\right\} = 0\,, \tag{178}$$

umschreiben läßt und durch Integration der drei in ihm zusammengefaßten Differentialgleichungen zu der Beziehung

$$\Delta \cdot \operatorname{grad} \mathfrak{V} + \frac{\partial}{\partial t}(k \mathfrak{V}) + \frac{1}{4}\frac{d^3 k}{d t^3} r^2 = F(t) \tag{179}$$

führt, in der $F(t)$ eine willkürliche Funktion der Zeit bedeutet. Diese Funktion kann nun ohne Verlust von Allgemeinheit gleich Null gesetzt werden; denn setzen wir die Lösung der *partiellen inhomogenen Differentialgleichung* (179) *für* $\mathfrak{V}$ in der Form

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1(x, y, z, t) + \frac{1}{k}\int^t F(t)\, dt$$

an, so sehen wir, daß die Funktion $\mathfrak{V}_1$ der Gleichung (179) mit der rechten Seite $F(t) = 0$ genügt, und da die Addition einer willkürlichen Funktion der Zeit an eine Potentialfunktion physikalisch bedeutungslos ist, können wir daher die Funktion $\mathfrak{V}_1$ ebensogut wie die ursprüngliche Funktion $\mathfrak{V}$ als das unser Problem charakterisierende Potential betrachten. Die obenstehende Überlegung hat uns also zu dem Ergebnisse geführt, daß das Potential in unserem Problem einer partiellen inhomogenen Differentialgleichung der Form

$$\Delta \cdot \operatorname{grad} \mathfrak{V} + \frac{\partial}{\partial t}(k \mathfrak{V}) + \frac{1}{4}\frac{d^3 k}{d t^3} r^2 = 0 \tag{180}$$

genügen muß. Nun ist aber die linke Seite dieser Gleichung mit der rechten Seite von (176) identisch, woraus sich die oben ausgesprochene Behauptung ergibt.

Unser Ausdruck (174) für χ liefert daher die Lösung

$$-\frac{1}{2}\chi = k\mathfrak{V} + \frac{1}{4}\frac{d^2k}{dt^2}r^2 + \text{const}, \tag{181}$$

die wir, durch Einführung einer neuen Funktion Φ durch die Beziehung

$$k(t) = \Phi^2(t) \tag{182}$$

auch in der Form

$$-\tfrac{1}{2}\chi = \Phi^2\mathfrak{V} + \tfrac{1}{2}(\dot{\Phi}^2 + \Phi\ddot{\Phi})r^2 + \text{const.} \tag{183}$$

umschreiben können. Um nun schließlich auch die Lösung für die mit der räumlichen Dichteverteilung unmittelbar zusammenhängende Funktion σ zu erhalten, bedenken wir, daß die in die Formel (166) eingehende Größe Q_0 nach (162) und (163), (182)

$$Q_0 = k(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) = \left|\frac{\Delta}{\Phi}\right|^2 = \left|\dot{\Phi}\mathfrak{r} + \frac{1}{\Phi}[\mathfrak{r}\cdot\beta]\right|^2 \tag{184}$$

ist. Die Ausrechnung der rechten Seite dieses Ausdruckes liefert, wenn man bedenkt, daß $\mathfrak{r}\,[\mathfrak{r}\cdot\beta]$ wegen der Perpendikularität der Vektoren $\mathfrak{r}$ und $[\mathfrak{r}\cdot\beta]$ gleich 0 ist

$$Q_0 = \dot{\Phi}^2 r^2 + \frac{1}{\Phi^2}|[\mathfrak{r}\cdot\beta]|^2 \tag{185}$$

und wir erhalten, indem wir (185) und (183) in (166) einsetzen

$$\frac{1}{2}\sigma = \Phi^2\mathfrak{V} + \frac{1}{2}\Phi\ddot{\Phi}r^2 - \frac{1}{2\Phi^2}|[\mathfrak{r}\cdot\beta]|^2 + \text{const.} \tag{186}$$

Formeln (183) und (186) zeigen, daß zur vollständigen Berechnung von χ und σ nur noch die Kenntnis der Potentialfunktion $\mathfrak{V}$ fehlt.

Der allgemeine Ausdruck für $\mathfrak{V}$ läßt sich durch Auflösung der diese Funktion bestimmenden partiellen Differentialgleichung (180) (oder der noch allgemeineren, durch Berücksichtigung des von uns hier vernachlässigten, von δ herrührenden Gliedes erweiterten Gleichung) gewinnen, und dies ist auch das von S. CHANDRASEKHAR in seiner oben zitierten Arbeit eingeschlagene Verfahren gewesen. Indessen ist dieser Weg ein außerordentlich mühsamer und wenig übersichtlicher, und wir wollen daher an dieser Stelle zur Gewinnung der allgemeinen Form der Funktion $\mathfrak{V}$ ein ganz anderes, von M. SCHÜRER[12]) angegebenes Verfahren anwenden, das außer seiner verhältnismäßigen Kürze noch den Vorteil bietet, uns die Grundlagen der CHANDRASEKHARschen Theorie nicht-stationärer Sternsysteme von einer ganz neuen Seite zu beleuchten.

Es ist M. SCHÜRER gelungen, sämtliche von S. CHANDRASEKHAR gefundenen *zeitabhängigen* Potentiale auf zeitlich unveränderliche Potentiale zurückzu-

---

[12]) M. SCHÜRER. Beitrag zur Dynamik der Sternsysteme, Veröffentlichung des Astronomischen Institutes der Universität Bern, Nr. 2, 1943, — A. N. Bd. 273, Heft 5 – 6

führen, aus denen sie durch eine zeitabhängige Maßstabstransformation des Raumes und der Zeit, verbunden mit einer Transformation auf ein bewegtes Koordinatensystem, hervorgehen. Hiermit soll nicht etwa gesagt werden, daß alle überhaupt möglichen zeitabhängigen Potentiale mit Hilfe der erwähnten Transformation auf zeitlich unveränderliche Potentiale zurückgeführt werden können; es muß bestimmt auch solche geben, bei denen eine solche Zurückführung nicht möglich ist, doch stellen die zeitlich veränderlichen Potentiale, die durch die SCHÜRERsche Transformation zeitlich unabhängiger Potentiale erhalten werden, eine große und wichtige Klasse dar, zu der auch sämtliche von CHANDRASEKHAR in dem zweiten, der Betrachtung der nichtstationären Sternsysteme gewidmeten Teile seiner Abhandlung abgeleiteten zeitabhängigen Potentiale gehören.

Die von M. SCHÜRER angegebene Transformation besteht, wie bereits erwähnt, aus zwei Schritten: a) einer Maßstabtransformation der drei räumlichen Koordinaten und der Zeit, und b) einer Transformation auf bewegte Koordinatensysteme; wir wollen beide hintereinander betrachten, und zwar um ihre Anwendung auf die uns hier interessierenden Fälle zu erleichtern, sowohl in Cartesischen als auch in Zylinderkoordinaten.

a) Maßstabtransformation der Zeit und des Raumes:

An Stelle der Zeit t wird eine neue Variable τ eingeführt, durch die Beziehung

$$d\tau = \Phi^2 dt\,, \tag{187}$$

wo unter $\Phi(\tau)$ eine willkürliche Funktion von τ zu verstehen ist.

An Stelle der Cartesischen Koordinaten x, y, z, bzw. der Zylinderkoordinaten ϖ, ϑ, z, die als Funktionen von t zu denken sind, werden die neuen, von der Variablen τ abhängigen Koordinaten ξ, η, ζ bzw. ϱ, ψ, ζ durch die folgenden Transformationsformeln eingeführt:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\xi(\tau)}{\Phi(\tau)}\,; & \varpi(t) &= \frac{\varrho(\tau)}{\Phi(\tau)}\,; \\ y(t) &= \frac{\eta(\tau)}{\Phi(\tau)}\,; & \vartheta(t) &= \psi(\tau)\,; \\ z(t) &= \frac{\zeta(\tau)}{\Phi(\tau)}\,; & z(t) &= \frac{\zeta(\tau)}{\Phi(\tau)}\,. \end{aligned} \tag{188}$$

Wir wollen nun das fundamentale Gleichungssystem des allgemeinen Problems der Stellardynamik, nämlich die LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen, die ja das zur Lösung der Kontinuitätsgleichung dienende System charakteristischer Gleichungen bilden (s. 2. Kapitel, Gl. (67)—(69)), durch Einführung der neuen, oben definierten Variablen transformieren. Die LAGRANGEschen Gleichungen lauten in Cartesischen, bzw. in Zylinderkoordinaten bekanntlich:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x}; & \ddot{\varpi} - \varpi \dot{\vartheta}^2 &= -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \varpi};\\
\ddot{y} &= -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y}; & \varpi^2 \ddot{\vartheta} + 2 \varpi \dot{\varpi} \dot{\vartheta} &= -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \vartheta};\\
\ddot{z} &= -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}; & \ddot{z} &= -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{189}
$$

Die Berechnung der ersten und zweiten Derivierten der Koordinaten nach der Zeit in dem nach der Anwendung der Transformation a) hervorgehenden neuen Raum-Zeit-System, ergibt, wenn wir eine Differentiation nach t mit einem Punkte, eine Differentiation nach τ mit einem Striche bezeichnen, wie leicht einzusehen, in Cartesischen Koordinaten

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x'\dot{\tau} = \frac{\xi'\Phi - \xi\Phi'}{\Phi^2} \cdot \dot{\tau} = \xi'\Phi - \xi\Phi',\\
\dot{y} &= y'\dot{\tau} = \frac{\eta'\Phi - \eta\Phi'}{\Phi^2} \cdot \dot{\tau} = \eta'\Phi - \eta\Phi',\\
\dot{z} &= z'\dot{\tau} = \frac{\zeta'\Phi - \zeta\Phi'}{\Phi^2} \cdot \dot{\tau} = \zeta'\Phi - \zeta\Phi',\\
\ddot{x} &= \dot{x}'\dot{\tau} = (\xi''\Phi - \xi\Phi'')\,\Phi^2,\\
\ddot{y} &= \dot{y}'\dot{\tau} = (\eta''\Phi - \eta\Phi'')\,\Phi^2,\\
\ddot{z} &= \dot{z}'\dot{\tau} = (\zeta''\Phi - \zeta\Phi'')\,\Phi^2,
\end{aligned}
\tag{190}
$$

und in Zylinderkoordinaten

$$
\begin{aligned}
\dot{\varpi} &= \varrho'\Phi - \varrho\Phi', & \ddot{\varpi} &= (\varrho''\Phi - \varrho\Phi'')\,\Phi^2,\\
\dot{\vartheta} &= \psi'\,\Phi^2, & \ddot{\vartheta} &= (\psi''\Phi^2 + 2\psi'\Phi'\Phi)\,\Phi^2,\\
\dot{z} &= \zeta'\Phi - \zeta\Phi', & \ddot{z} &= (\zeta''\Phi - \zeta\Phi'')\,\Phi^2.
\end{aligned}
\tag{191}
$$

Ebenso folgt für die Derivierten der Potentialfunktion $\mathfrak{B}$ im ersteren Falle

$$
\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \xi}\Phi, \qquad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \eta}\Phi, \qquad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \zeta}\Phi,
\tag{192}
$$

und im zweiten Falle

$$
\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \varpi} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \varrho}\Phi, \qquad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \psi}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \zeta}\Phi.
\tag{193}
$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (190), (192), bzw. (191), (193) in die entsprechenden Gleichungen (189), erhalten wir die transformierten LAGRANGEschen Gleichungen in der Form:

in Cartesischen Koordinaten

$$(\xi''\Phi - \xi\Phi'')\Phi^2 = -\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\xi}\cdot\Phi \quad \text{oder} \quad \xi'' = \frac{\Phi''}{\Phi}\xi - \frac{1}{\Phi^2}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\xi},$$

$$\eta'' = \frac{\Phi''}{\Phi}\eta - \frac{1}{\Phi^2}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\eta}, \qquad (194)$$

$$\zeta'' = \frac{\Phi''}{\Phi}\zeta - \frac{1}{\Phi^2}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\zeta},$$

und in Zylinderkoordinaten

$$\varrho'' - \varrho\psi'^2 = \frac{\Phi''}{\Phi}\varrho - \frac{1}{\Phi^2}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\varrho},$$

$$\varrho^2\psi'' + 2\varrho\varrho'\psi' = -\frac{1}{\Phi^2}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\psi}, \qquad (195)$$

$$\zeta'' = \frac{\Phi''}{\Phi}\zeta - \frac{1}{\Phi^2}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\zeta}.$$

Das Ausschlaggebende ist nun, daß man die rechten Seiten beider Gleichungssysteme wieder als Derivierten nach den entsprechenden Koordinaten neuer «Potentialfunktionen» auffassen kann, nämlich der Funktionen

$$\mathfrak{W} = -\frac{1}{2}\frac{\Phi''}{\Phi}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \frac{1}{\Phi^2}\mathfrak{B}\left(\frac{\xi}{\Phi}, \frac{\eta}{\Phi}, \frac{\zeta}{\Phi}\right)$$

bzw. (196)

$$\mathfrak{W} = -\frac{1}{2}\frac{\Phi''}{\Phi}(\varrho^2 + \zeta^2) + \frac{1}{\Phi^2}\mathfrak{B}\left(\frac{\varrho}{\Phi}, \psi, \frac{\zeta}{\Phi}\right).$$

Unsere Gleichungssysteme (194) und (195) stellen daher die LAGRANGEschen Gleichungen eines neuen dynamischen Problems dar, dessen Potentialfunktion durch die neue Funktion $\mathfrak{W}$ gegeben wird. Wenn sich die ursprüngliche Potentialfunktion $\mathfrak{B}$ auf ein stationäres Sternsystem bezog, die Zeit t also nicht explicite enthielt, so ist die Potentialfunktion des neuen Problems, vermöge des in ihr vorkommenden Argumentes $\Phi(\tau)$ explicite zeitabhängig (wenn wir unter τ nun die Zeit verstehen, wobei wir natürlich auch die Bezeichnungsweise nachträglich von τ auf t umändern können). Die Lösung dieses neuen nicht-stationären Problems kann aber aus der Lösung des ursprünglichen stationären Problems, falls diese bekannt ist, sofort erhalten werden, indem man an den Integralen des letzteren die Transformation (187), (188) vornimmt, denn das Ergebnis ist dann augenscheinlich ein System von Integralen des das neue, nicht-stationäre Problem ausdrückenden Gleichungssystems (194) oder (195). Die Ausdrücke (196) der dem stationären System zugeordneten zeitabhängigen Potentiale lassen sich durch die Anwendung einer weiteren Transformation auf ein bewegtes Koordinatensystem noch etwas verallgemeinern.

b) Transformation auf bewegte Koordinatensysteme:

Diese Transformation stellen wir uns als aus zwei unabhängigen Transformationen zusammengesetzt vor, nämlich:

α) Einer gleichförmigen Rotation um eine Achse, die wir als die Z-Achse wählen wollen; die Transformationsformeln sind dann am einfachsten in zylindrischen Koordinaten zu formulieren:

$$\begin{aligned} \varpi &= \varrho\,, \\ \vartheta &= \psi + \beta t\,, \\ z &= \zeta\,, \end{aligned} \tag{197}$$

und

β) Einer beliebigen Bewegung des Anfangspunktes des Koordinatensystems, ohne Drehung der Koordinatenachsen, die durch die in Cartesischen Koordinaten besonders einfache Transformation

$$\begin{aligned} x &= \xi - \xi_0(t)\,, \\ y &= \eta - \eta_0(t)\,, \\ z &= \zeta - \zeta_0(t) \end{aligned} \tag{198}$$

zum Ausdrucke gebracht wird.

Bekanntlich lassen sich die rechten Seiten der LAGRANGEschen Gleichungen nach der Transformation (197) wiederum als die entsprechenden Derivierten einer neuen Potentialfunktion

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{V}(\varrho, \psi + \beta t, \zeta) + \tfrac{1}{2}\beta^2\varrho^2 = \mathfrak{W}(\varrho, \psi + \beta t, \zeta) \tag{199}$$

darstellen, die man erhält, wenn man zu der ursprünglichen Potentialfunktion $\mathfrak{V}$ das Potential der Zentrifugalkraft $\tfrac{1}{2}\beta^2\varrho^2$ additiv hinzufügt. Und ebenso können die nach der Transformation (198) entstehenden Bewegungsgleichungen auf den ursprünglichen LAGRANGEschen Typus zurückgeführt werden, wenn man ein Potential der Form

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{V}[(\xi - \xi_0), (\eta - \eta_0), (\zeta - \zeta_0)] - (\xi\ddot{\xi}_0 + \eta\ddot{\eta}_0 + \zeta\ddot{\zeta}_0) \tag{200}$$

einführt.

Durch Kombination der Raum-Zeit-Transformation (187), (188) mit den beiden Transformationen (197) und (198) auf ein bewegtes Koordinatensystem ergibt sich ein verallgemeinerter Typus von Potential, den auch S. CHANDRASEKHAR im Verlaufe seiner Untersuchungen gefunden hat, und als das allgemeinste, mit den Grundannahmen seiner Theorie verträgliche, zeitabhängige Potential bezeichnet. Wir wollen uns indessen an dieser Stelle mit einem etwas weniger allgemeinen Potentiale begnügen, das für den von uns hier ins Auge gefaßten Fall, bei dem wir (s. S. 203, Gl. (172)) eine allgemeine Translation ausgeschlossen hatten, die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung (180) darstellt, und das durch Weglassen der dritten, ge-

rade die allgemeine Translation ausdrückenden Transformation (198) erhalten werden kann.

Durch Anwendung der Transformation (197) auf das willkürlich vorgegebene Potential $\mathfrak{V}(\varpi, \vartheta, z)$ erhalten wir zunächst den Ausdruck (199) und durch Anwendung der Raum-Zeittransformation (187), (188) auf diesen Ausdruck

$$\mathfrak{V} = -\frac{1}{2}\frac{\Phi''}{\Phi}(\varrho^2+\zeta^2) + \frac{1}{2\Phi^4}\beta^2\varrho^2 + \frac{1}{\Phi^2}\mathfrak{V}\left(\frac{\varrho}{\Phi}, \psi + \beta\int\frac{d\tau}{\Phi^2}, \frac{\zeta}{\Phi}\right). \qquad (201)$$

Dies ist der allgemeine Typus, dem ein für den von uns hier untersuchten Fall geltendes Potential angehören muß, wobei unter $\mathfrak{V}$ eine willkürliche Funktion der drei angegebenen Argumente zu verstehen ist. Wegen dieser Willkür läßt sich der Ausdruck (201) für das Potential noch etwas vereinfachen, da wir das zweite Glied natürlich in die willkürliche Funktion $\mathfrak{V}$ gleich mit aufnehmen (absorbieren lassen) können. Indem wir noch nachträglich die Bezeichnungen der Variablen von $\varrho, \psi, \zeta, \tau$ in ϖ, ϑ, z und t umändern, was natürlich immer gestattet ist, erhalten wir für das gesuchte Potential $\mathfrak{V}$ den endgültigen, mit Formel (1631) der Abhandlungen Chandrasekhars übereinstimmenden Ausdruck

$$\mathfrak{V} = -\frac{1}{2}\frac{\Phi''}{\Phi}r^2 + \frac{1}{\Phi^2}\mathfrak{V}^*\left(\frac{\varpi}{\Phi}, \vartheta + \beta\int\frac{dt}{\Phi^2}, \frac{z}{\Phi}\right) \qquad (202)$$

in dem $\mathfrak{V}^*$ eine *willkürliche* Funktion ihrer drei Argumente und Φ eine willkürliche Funktion der Zeit bedeutet[13]).

---

[13]) Es bleibt noch zu zeigen, daß die hier auftretende, durch (187) eingeführte Funktion Φ mit der durch (182) definierten Funktion Φ, deren Quadrat gleich $h(t)$, also dem einzigen nichtverschwindenden Koeffizienten $a = b = c$ des hier zu einer Kugel gewordenen Geschwindigkeitsellipsoids ist, wirklich indentifiziert werden darf, wie wir es bereits durch die Wahl desselben Symbols zu ihrer Bezeichnung angedeutet haben. Der Beweis hierfür ist nicht schwer zu erbringen: wenn die Potentialfunktion $\mathfrak{V}$ keinerlei einschränkenden Bedingungen unterworfen ist, besteht nur ein einziges Integral der Bewegungsgleichungen, nämlich das Energieintegral

$$I_1 = u^2 + v^2 + w^2 + 2\mathfrak{V}(x, y, z) \quad ,$$

und da dieses als einziges Argument der Verteilungsfunktion Ψ auftritt, ist die Verteilung der Geschwindigkeiten (s. auch S. 88) notwendig eine kugelsymmetrische. Wenden wir nun auf diesen Fall unsere Transformationen (187) (188) (197) (198) an und beachten, daß nach (190)

$$u = \dot{x} = x' \cdot \dot{\tau} = x' \cdot \Phi\,, \quad v = \dot{y} = y' \cdot \Phi\,, \quad w = \dot{z} = z' \cdot \Phi$$

ist, so sehen wir sofort, daß in dem neuen, durch die Transformation entstandenen dynamischen Problem die Verteilung der Restgeschwindigkeiten x', y', z' wieder eine kugelsymmetrische wird, und der gemeinsame, die Streuung definierende Faktor $h(t)$ in (180) gerade gleich Φ^2 ist, wie es der Festsetzung (182) entspricht.

Wie bereits oben erwähnt, ist es M. Schürer gelungen, alle von S. Chandrasekhar gefundenen zeitabhängigen Potentiale aus passend gewählten zeitunabhängigen Potentialen mit Hilfe seiner Transformation abzuleiten. Da sich die mit letzteren verträglichen Integrale der Bewegungsglei-

Setzen wir nun den soeben gewonnenen Ausdruck für das Potential $\mathfrak{B}$ in unseren Ausdruck (186) für σ ein, so erhalten wir, da der im dritten Gliede auftretende absolute Betrag der Rotationsgeschwindigkeit, wenn diese um die Z-Achse erfolgt, gleich $\beta\varpi$ ist,

$$\frac{1}{2}\sigma = -\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\Phi^2}\varpi^2 + \mathfrak{B}^*\left(\frac{\varpi}{\Phi}, \vartheta + \beta\int\frac{dt}{\Phi^2}, \frac{z}{\Phi}\right) + \text{const.} \tag{203}$$

oder auch, da wir wegen der Willkürlichkeit der Funktion $\mathfrak{B}^*$ das erste Glied in $\mathfrak{B}^*$ einbeziehen können

$$\sigma \equiv \sigma\left(\frac{\varpi}{\Phi}, \vartheta + \beta\int\frac{dt}{\Phi^2}, \frac{z}{\Phi}\right). \tag{204}$$

Damit haben wir die Grundlage für die von CHANDRASEKHAR vorgeschlagene Erklärung des Spiralenphänomens gewonnen.

Die Komponenten der Geschwindigkeit des Lokalen Zentroids ergeben sich aus (162) und (163) (nach Streichung von δ) leicht zu

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\Lambda_x}{\Phi^2} = \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}x + \frac{1}{\Phi^2}[\mathfrak{r}\cdot\beta]_x = \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}x + \frac{\beta}{\Phi^2}y, \\ Y_0 &= \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}y - \frac{\beta}{\Phi^2}x, \qquad Z_0 = \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}z, \end{aligned} \tag{205}$$

also auf Zylinderkoordinaten umgerechnet

$$\Pi_0 = \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}\varpi, \qquad \Theta_0 = -\frac{\beta}{\Phi^2}\varpi, \qquad Z_0 = \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}z. \tag{206}$$

Das Argument unserer Verteilungsfunktion $\Psi(Q+\sigma)$ nimmt somit wegen (206) und (203) explicite die Form an

$$Q+\sigma = \Phi^2\left\{\left(\Pi - \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}\varpi\right)^2 + \left(\Theta + \frac{\beta}{\Phi^2}\varpi\right)^2 + \left(Z - \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}z\right)^2\right\} - \frac{\beta^2}{\Phi^2}\varpi^2 + 2\,\mathfrak{B}^*. \tag{207}$$

Um hier rechnerisch weiterkommen zu können, wollen wir nun unsere allgemeine Verteilungsfunktion Ψ dahin spezialisieren, daß wir ihr die Form einer *Maxwellschen Verteilung* zuschreiben. Wir haben dann

$$\Psi = e^{-\Phi^2\left\{\left(\Pi - \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}\varpi\right)^2 + \left(\Theta + \frac{\beta}{\Phi^2}\varpi\right)^2 + \left(Z - \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}z\right)^2\right\} + \frac{\beta^2}{\Phi^2}\varpi^2 - 2\mathfrak{B}^*}. \tag{208}$$

chungen angeben lassen, können aus diesen durch Multiplikation mit willkürlichen Konstanten (und evtl. Erhebung in die zweite Potenz, bei Integralen, die nur die ersten Potenzen der Geschwindigkeiten enthalten) und Addition die allgemeinsten in den Geschwindigkeitskomponenten quadratischen Ausdrücke gebildet werden. Durch Anwendung der Transformation und Zusammenfassung der Glieder gemäß der Form (8) lassen sich dann die von S. CHANDRASEKHAR abgeleiteten Ausdrücke für die Koeffizienten des jeweiligen Geschwindigkeitsellipsoids sowie die Geschwindigkeitskomponenten des Lokalen Zentroids in verhältnismäßig sehr einfacher Weise wiedergewinnen. Die Bildung des allgemeinsten quadratischen Ausdruckes in den Geschwindigkeitskomponenten entspricht genau dem von uns bereits in Kapitel 2 (Gl. (105), (138)) eingeschlagenen Verfahren.

Bei dieser Wahl der Verteilungsfunktion Ψ ist es nicht schwer, sich von der physikalischen Bedeutung der Größen Φ und σ Rechenschaft zu geben. Integrieren wir nämlich den Ausdruck (208) nach den drei Geschwindigkeitsvariablen von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhalten wir bekanntlich (s. 1. Kapitel, Gl. (50)) die Anzahl ν der Sterne in der Volumeneinheit

$$\nu = \frac{\sqrt{\pi^3}}{\Phi^3} e^{-\left(\frac{\beta^2}{\Phi^2}\varpi^2 - 2\mathfrak{V}^*\right)} = \frac{\sqrt{\pi^3}}{\Phi^3} e^{-\sigma}. \tag{209}$$

Da für eine MAXWELLsche Verteilung die mittlere Restgeschwindigkeit in einer Richtung durch den Ausdruck $1/\Phi\sqrt{\pi}$ gegeben wird, d. h.

$$\overline{|\Pi - \Pi^0|} = \overline{|\Theta - \Theta_0|} = \overline{|Z - Z_0|} = \frac{1}{\Phi\sqrt{\pi}} \tag{210}$$

ist, stellt die zu unserer Funktion Φ inverse Größe $1/\Phi$ ein Maß für die *Streuung* der Restgeschwindigkeiten um die Geschwindigkeit des Lokalen Zentroids dar. Andererseits hängt die räumliche Sterndichte ν, bei vorgegebenem $\Phi(t)$, zu jeder vorgegebenen Zeit t nur noch von der Funktion σ ab, die wir somit als eine Art «reduzierte» Dichte betrachten können. Da nach (204) das σ eine willkürliche Funktion der drei angegebenen Argumente

$$\frac{\varpi}{\Phi}, \; \vartheta + \beta\int\frac{dt}{\Phi^2}, \; \frac{z}{\Phi}$$

sein kann, läßt sich die räumliche Sterndichte ν auch in der Form

$$\nu = \frac{1}{\Phi^3}\nu^*\left(\frac{\varpi}{\Phi}, \; \vartheta + \beta\int\frac{dt}{\Phi^2}, \; \frac{z}{\Phi}\right) \tag{211}$$

schreiben, wo ν^* wiederum eine willkürliche Funktion derselben Argumente sein darf, und wir sehen hieraus, daß unsere weiteren theoretischen Betrachtungen der Funktion σ sich weitgehend auch auf die räumliche Sterndichte ν beziehen werden.

Um das Wesen des Spiralenphänomens in seiner allereinfachsten Form zu erfassen, wollen wir uns auf die Betrachtung eines unendlich abgeplatteten, d. h. zweidimensionalen Sternsystems beschränken und dementsprechend die Funktionen σ und ν sowie das Potential $\mathfrak{V}$ nur von den beiden Argumenten

$$\frac{\varpi}{\Phi}, \; \vartheta + \beta\int\frac{dt}{\Phi^2} \tag{212}$$

abhängen lassen. Die Z-Komponenten aller Geschwindigkeiten setzen wir dann natürlich identisch gleich Null. Wie aus den Formeln (204) und (211) zu ersehen ist, hängen die Funktionen σ und ν nicht explicite von der Zeit t ab, da letztere in sie nur durch die Funktion $\Phi(t)$ eingeht. Die Trajektorien der Punkte, in denen das σ einen ursprünglich vorgegebenen Wert σ_1 behält, werden daher dadurch erhalten, daß wir die diesem Werte entsprechenden

konstanten Werte c_1 und c_2 der beiden Argumente (212) angeben; die Parameterdarstellung dieser Kurven lautet also

$$\varpi = c_1 \Phi(t), \qquad \vartheta = c_2 - \beta \int \frac{dt}{\Phi^2}, \tag{213}$$

und die in Zylinderkoordinaten ausgedrückte Bahnkurve wird durch Elimination von t aus den beiden obenstehenden Gleichungen erhalten. Durch einfache Differentiation dieser Gleichungen nach t erhalten wir für die zeitlichen Inkremente der Koordinaten ϖ und ϑ, die einem Zeitintervalle dt entsprechen

$$d\varpi = c_1 \dot{\Phi}\, dt, \qquad d\vartheta = -\frac{\beta}{\Phi^2}\, dt, \tag{214}$$

oder, unter Benutzung der Beziehungen (206)

$$d\varpi = \Pi_0\, dt, \qquad \varpi\, d\vartheta = \Theta_0\, dt, \tag{215}$$

woraus sich der bemerkenswerte Satz ergibt, daß *die Bewegung eines Punktes, in dem das σ einen konstanten Wert behält, mit der Bewegung des ihm entsprechenden Lokalen Zentroids übereinstimmt.*

Nun läßt sich an Hand der Ausdrücke (214) leicht einsehen, daß die Bahn eines solchen Punktes eine allgemeine *Spirale* sein wird. Betrachten wir z. B. den Fall, daß die durch die zweite Gleichung (214) definierte Rotation in positiver (dem Uhrzeigersinne entgegengesetzter) Richtung erfolgt, die Konstante β mithin negativ ist. Dann entspricht einem positiven Inkremente von $d\vartheta$ bei $\dot{\Phi} > 0$ ein positives, bei $\dot{\Phi} < 0$ ein negatives Inkrement von ϖ, also

$$\begin{array}{llll} \dot{\Phi} > 0, & d\vartheta > 0, & d\varpi > 0, & \\ \dot{\Phi} < 0, & d\vartheta > 0, & d\varpi < 0, & \end{array} \qquad (\beta < 0)$$

d. h. unser Punkt beschreibt im ersten Falle die in Abb. 13a dargestellte Spirale, und zwar indem er sich von Innen nach Außen bewegt, im zweiten Falle aber die in Abb. 13b dargestellte Spirale, und zwar von Außen nach Innen. Der Fall einer Rotation in negativer (Uhrzeiger-)Richtung ist zu dem eben betrachteten natürlich einfach spiegelbildlich.

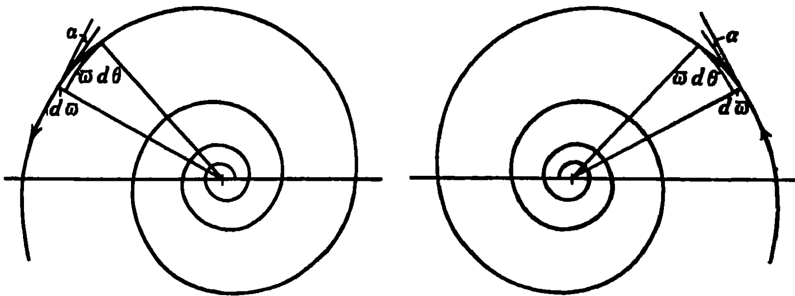


Abb. 13 a und b
Entstehung von Spiralarmen, nach S. Chandrasekhar.

Bezeichnen wir den Winkel, den die Tangente zu der Spirale mit dem Radiusvektor in irgend einem ihrer Punkte bildet mit $90^\circ - \alpha$, dann ist, wie aus Abb. 13 sofort zu ersehen,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\varpi}{\varpi \, d\vartheta} \tag{216}$$

und wegen (215) und (206)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Pi_0}{\Theta_0} = -\frac{\dot{\Phi}\Phi}{\beta} = -\frac{1}{2\beta}\frac{d\Phi^2}{dt}. \tag{217}$$

Die Gestalt der Spirale hängt also von der Wahl der in unseren Betrachtungen zunächst ganz willkürlich gelassenen Funktion Φ ab, wodurch die Möglichkeit der Erklärung der Formen sehr verschiedener Typen von Spiralnebeln gegeben wird. Wählen wir speziell für Φ^2 eine lineare Abhängigkeit von der Zeit, setzen also

$$\Phi^2 = A\,(t - t_0) \tag{218}$$

mit den willkürlichen Konstanten A und t_0, dann folgt aus den Beziehungen (213) durch einfache Integration

$$\varpi = c_1 \sqrt{A\,(t - t_0)}\,, \qquad \vartheta = c_2 - \frac{\beta}{A} \ln (t - t_0)\,, \tag{219}$$

und durch Elimination der Zeit

$$\varpi = c_1 \sqrt{A}\, e^{-\frac{A}{2\beta}(\vartheta - c_2)}, \tag{220}$$

oder, unter Beachtung des Umstandes, daß in diesem Falle nach (217)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Pi_0}{\Theta_0} = -\frac{A}{2\beta} = \text{const.}$$

ist, unter Einführung einer neuen Konstanten ϖ_0

$$\varpi = \varpi_0\, e^{\frac{\Pi_0}{\Theta_0}\cdot\vartheta}, \tag{221}$$

was die Gleichung einer *logarithmischen* Spirale darstellt.

Die Ausdehnung der hier wiedergegebenen Betrachtungen auf den räumlichen Fall bietet keinerlei Schwierigkeiten und erfolgt durch Hinzufügung einer dritten Bedingung

$$\frac{z}{\Phi} = c_3 \tag{222}$$

zu den beiden Bedingungen (213). Die Bahn des Punktes konstanter vorgegebener räumlicher Sterndichte σ_1 wird dann durch Elimination von t aus den beiden Ausdrücken (214) und

$$dz = c_3 \dot{\Phi}\, dt$$

erhalten; da aus ihnen

$$\frac{d\varpi}{dz} = \frac{c_1}{c_3} = \frac{\varpi}{z} = \text{const.} \tag{223}$$

folgt, bewegt sich der Punkt in einer durch die Z-Achse gehenden Meridianebene radial, während seine Projektion auf die XY-Ebene in dieser eine allgemeine Spirale beschreibt.

Die oben gegebene Erklärung des Zustandekommens eines Spiralenphänomens läßt sich zweifellos auf die Deutung der bei vielen Spiralnebeln beobachteten Formen anwenden. Wenn die Häufigkeit des Vorkommens gerade der logarithmischen Spiralen durch sie auch noch keine Begründung erfährt, so räumt sie wenigstens auch diesen Spiralen einen Platz ein und läßt darüber hinaus noch einen weiten Spielraum für andere, durch die Erfahrung ebenfalls zu belegende Spiralformen übrig. Es ist zu beachten, daß nach der hier wiedergegebenen Theorie, die Spiralwindungen wirkliche Bahnen, wenn nicht der einzelnen den Nebel bildenden Sterne, so doch der Gegenden konstanter räumlicher Sterndichte sind, so daß ein Spiralnebel auch im Laufe seiner Entwicklung jedenfalls für sehr lange Zeiten seine charakteristische Form als Spiralnebel behalten müßte. Wir bemerken ferner, daß nach den Formeln (206) die Radialgeschwindigkeit und auch die Rotationsgeschwindigkeit in einem Spiralnebel nach außen proportional zu dem Abstande von der Rotationsachse zunehmen müßte, was mit der Feststellung, daß die äußersten Partien des großen Andromedanebels (nach Beobachtungen von BABCOCK) eine größere Rotationsgeschwindigkeit zu besitzen scheinen, als die mehr im Innern liegenden, zusammenzuhalten wäre. Was schließlich die Geschwindigkeiten senkrecht zu der Symmetrieebene des Nebels betrifft, so müssen letztere, bei so flachen Gebilden, wie es die Spiralnebel sind, ganz unbeträchtlich sein, denn aus den Formeln (206) ergibt sich unmittelbar

$$\frac{Z_0}{\Pi_0} = \frac{z}{\varpi}, \tag{223'}$$

was für ein flaches Gebilde, mit Ausnahme der um den Mittelpunkt liegenden Teile, immer einen sehr kleinen Bruch darstellt. Ganz unerklärt bleibt nur die Polarität der beiden Äste eines Spiralnebels, die empirisch doch gut belegt zu sein scheint, auch wenn die genaue Untersuchung der besten heute zur Verfügung stehenden Aufnahmen, außer den beiden Hauptästen, oft die Anwesenheit mehrerer weiterer, schwächerer Spiralarme verrät.

Die oben geschilderte Theorie der Spiralstruktur stellt nur einen besonders einfachen Fall ihrer Entstehung dar und ist einer so weiten Verallgemeinerung fähig, daß auch die ausgefallensten Formen, die uns bei einigen Außergalaktischen Nebeln entgegentreten, in ihr eine Erklärung finden dürften. Diese Verallgemeinerung, die gleichfalls von S. CHANDRASEKHAR ge-

geben worden ist, wird dadurch erreicht, daß man die einschränkende Bedingung (172) durch die (zeitabhängigen) Translationsbewegungen der Zentroide ausgeschlossen worden waren, fallen läßt. Da es nicht möglich ist, an dieser Stelle die weitläufige und komplizierte Theorie der allgemeinen Spiralstruktur CHANDRASEKHARs auch nur im Auszuge wiederzugeben, werden wir uns hier mit ganz wenigen Bemerkungen, die ihren allgemeinen Charakter andeuten sollen, begnügen müssen.

Wenn der Vektor $\delta \neq 0$ ist, kommen zu den Geschwindigkeitskomponenten X_0, Y_0, Z_0 in (162) noch die Komponenten

$$\frac{\delta_1}{\Phi^2}, \qquad \frac{\delta_2}{\Phi^2}, \qquad \frac{\delta_3}{\Phi^2}$$

hinzu (s. auch die SCHÜRERsche Transformation β), und das Potential $\mathfrak{V}$ hat in diesem Falle einen allgemeineren Ausdruck[14]) und genügt einer gegenüber (180) etwas verallgemeinerten Differentialgleichung. An Stelle des Ausdruckes (204) für die reduzierte Sterndichte σ tritt nun, unter Einführung der Bezeichnungen

$$\xi = \frac{x}{\Phi}, \quad \eta = \frac{y}{\Phi}, \quad \zeta = \frac{z}{\Phi}, \quad \tau = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\Phi^2} \tag{224}$$

der verallgemeinerte Ausdruck

$$\sigma = \sigma^* \left\{ (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2;\ \vartheta + \beta\tau,\ \zeta - \zeta_0 \right\}, \tag{225}$$

in dem σ^* eine willkürliche Funktion und ξ_0, η_0, ζ_0 gewisse durch $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ ausdrückbare Funktionen von τ (bzw. der Zeit t) sind. Die Bahnen der Punkte konstanter Sterndichte $\sigma = \sigma_1$, werden daher in Parameterform durch die Gleichungen

$$\mathfrak{p}^2 = (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 = c_1^2, \qquad \operatorname{arctg} \frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0} = \vartheta = c_2 - \beta\tau,$$
$$\zeta - \zeta_0 = c_3 \tag{226}$$

gegeben. Vergleichen wir nun diese Ausdrücke mit den ihnen entsprechenden Formeln (213) und (222) für den Fall $\delta = 0$, so sehen wir, daß der Hauptunterschied zwischen ihnen darin besteht, daß der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit β rotierende Radiusvektor ϖ in dem als *unbeweglich* gedachten Anfangspunkte des Koordinatensystems befestigt war, während wir es hier mit einem allerdings auch mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden «Hebelarme» $\mathfrak{p} = c_1$ zu tun haben, dessen «Befestigungspunkt» in der (ξ, η)-Ebene mit τ (oder t) wandert und einen gewissen, in weiten Grenzen willkürlich zu wählenden geometrischen Ort (ξ_0, η_0) beschreibt. Es ist klar, daß bei einer so allgemeinen Fassung des «Spiralenphänomens», durch ent-

[14]) Siehe M. SCHÜRER, a. a. O. Formel (14).

sprechende Wahl des geometrischen Ortes (ξ_0, η_0) außerordentlich verschiedene Gestalten für die Kurve und die Bewegung in der xy-Ebene erhalten werden können, zumal letztere ja aus der sich zunächst ergebenden Kurve (ξ, η) erst durch Anwendung der Transformation (224), die ihrerseits noch eine willkürliche Funktion der Zeit enthält, erhalten wird. Aus gewissen Überlegungen, deren Wiedergabe uns hier zu weit führen würde, glaubt S. CHANDRASEKHAR schließen zu können, daß die physikalisch sinnvolleren

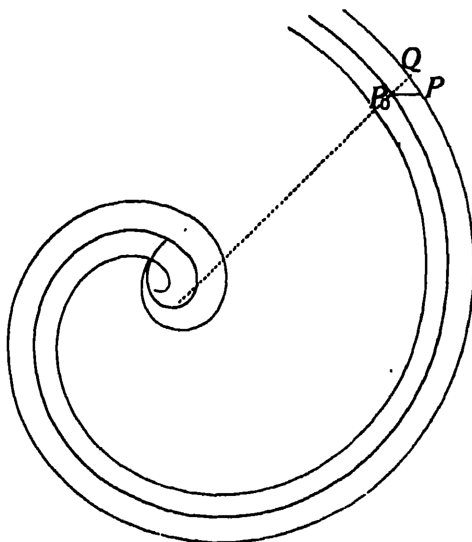


Abb. 14
Verallgemeinertes Spiralenphänomen: a) die Grundlinie ist eine Archimedische Spirale.

Fälle solchen Kurven (ξ_0, η_0) entsprechen, die von dem Befestigungspunkte (ξ_0, η_0) des Hebelarmes $\mathfrak{p}$ in bezug auf die die Zeit vertretende Variable τ mit einer reellen Periode beschrieben werden. Die resultierende Bewegung in der (ξ, η)-Ebene hat dann zwei Perioden: die soeben erwähnte und die Rotationsperiode des Hebelarmes $2\pi/\beta$. (Eine dritte Periode, die in diesen Fällen für die Bewegung in der ζ-Koordinate gilt, die ja, wie die Gleichungen (226) zeigen, ganz unabhängig von der Bewegung in der (ξ, η)-Ebene behandelt werden kann, braucht uns hier nicht näher zu beschäftigen.) In Abb. 14a sind zwei Kurven (ξ, η) dargestellt, die auf die oben geschilderte Weise von einem die Gestalt einer *archimedischen Spirale* besitzenden «Locus» (ξ_0, η_0) aus erzeugt werden (wobei noch die Gleichheit der beiden obengenannten Perioden vorausgesetzt ist) und die für die Erklärung weitgeöffneter Spiralen, wie sie uns z. B. in dem Spiralnebel Messier 101 entgegentreten, geeignet erscheinen; Abb. 14b stellt eine Auswahl von Kurven (ξ, η) dar, die auf einen *geradlinigen* Locus zurückgehen, und mittelst derer sich zahlreiche

«Balkenspiralen» der frühen Klassen *SBa* und *SBb* in nicht unbefriedigender Weise darstellen lassen dürften. Aber auch kompliziertere, oder von der Norm stärker abweichende Formen sind im Rahmen dieser verallgemeinerten Theorie, deren Hauptvorzug gerade darin zu bestehen scheint, daß sie eine außerordentlich große Fülle verschiedenartigster Gestalten zu umfassen vermag, ohne besondere Schwierigkeit unterzubringen. Hierzu gehören die

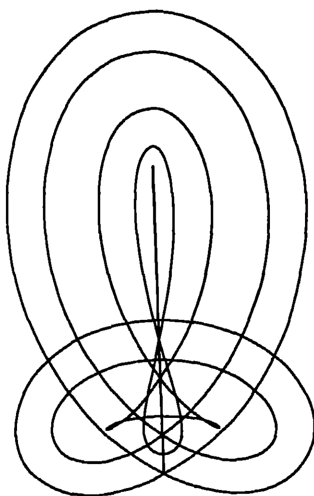


Abb. 14 b
Die Grundlinie ist eine Gerade.

kleinen «geschlossenen» (kringelartigen) Nebel und ihnen verwandte Objekte, die durch die verschiedensten Arten von ***Episyklen,*** (also auf kreisförmige (ξ_0, η_0)-Loci zurückgehende Kurven (ξ, η)), approximiert werden können (Abb. 14c) oder sogar die sehr seltenen *V*-förmigen Nebel, wie *NGC* 4781, für die Abb. 14d eine Reihe von auf einem ***hyperbolischen*** Locus, (also einem Locus mit imaginärer Periode), beruhenden Beispielen gibt.

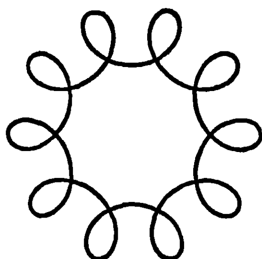


Abb. 14 c
Die Grundlinie ist ein Kreis.

Zum Schlusse soll noch die Frage der Möglichkeit des Vorkommens von «Sternströmungen» in den Spiralnebeln gestreift werden, die aus dem Grunde von Bedeutung ist, weil unsere eigene Milchstraße, in der eine solche für die Umgebung der Sonne mit Sicherheit festgestellt ist, sich letzten Endes doch noch als ein Spiralnebel erweisen könnte. Da die hier geschilderte Theorie CHANDRASEKHARS von dem Grundpostulate (160) der sphärisch-sym-

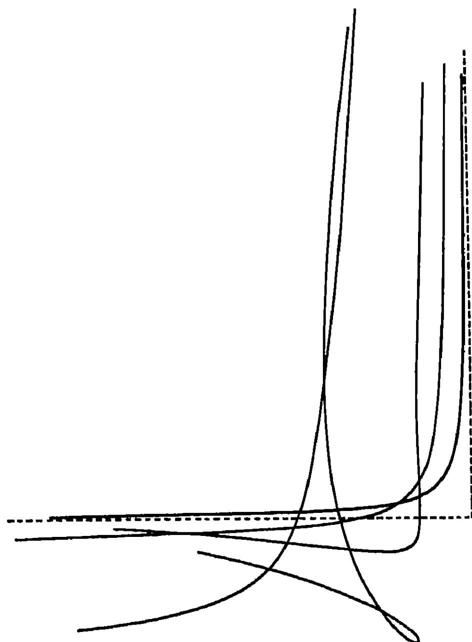


Abb. 14 d

Die Grundlinie ist eine Hyperbel.

metrischen Verteilung der «Restgeschwindigkeiten» ausgeht, hat eine Sternströmung, die ja gerade in dem Nichterfülltsein dieser Bedingung besteht, in ihr eigentlich keinen Platz. Da aber die Bewegung der Punkte konstanter räumlicher Sterndichte σ längs den Spiralarmen, je nach dem Vorzeichen von $\dot{\Phi}$ (s. S. 213) sowohl nach außen als nach innen erfolgen kann, besteht die Möglichkeit, das Strömungsphänomen nach dem Vorbilde von J. C. KAPTEYN und A. S. EDDINGTON (s. S. 86) als Begegnung zweier sich durchdringender unabhängiger Sternströme, also als Überlagerung zweier gegeneinander verschobener sphärisch-symmetrischer Geschwindigkeitskörper zu deuten. Allerdings würde bei dieser Deutung die Bewegungsrichtung der beiden Sternströme vermutlich meistens in der Tangentenrichtung zum Spiralaste liegen müssen, was in unserem Galaktischen System, bei der

Kleinheit des von dieser Richtung mit dem Radius Vektor gebildeten Winkels (höchstens 20°) einen außerordentlich steilen Verlauf des Spiralarmes bedingen würde.

Eine andere, in ihren Ergebnissen mit der CHANDRASEKHARschen weitgehend übereinstimmende Theorie der Spiralnebel hat B. LINDBLAD in einer Reihe, bis in das Jahr 1926 zurückreichender Abhandlungen entwickelt[15]), die sich eng an seine auf S. 128 bereits erwähnten Betrachtungen über die evtl. eintretende Instabilität von Kreisbahnen in der Äquatorebene eines homogenen Rotationsellipsoids anschließt. Der Charakter dieser Bahnen, die durch eine geringe Störung aus einer ursprünglichen instabilen Kreisbahn ent-

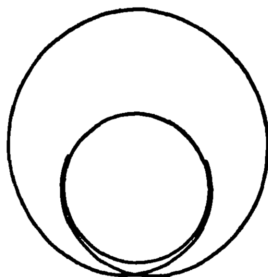


Abb. 15

Die instabilen spiralförmigen Sternbahnen in der Umgebung eines gravitierenden abgeplatteten Rotationsellipsoids, nach B. Lindblad.

stehen, ist in Abb. 15 wiedergegeben: in ihrem inneren Teile berühren sie die ursprüngliche Kreisbahn asymptotisch, und erreichen nach einer Anzahl von spiralförmigen Windungen eine gewisse maximale Entfernung vom Mittelpunkte, die bei zunehmender Abplattung des als abgeplattetes Rotationsellipsoid gedachten Zentralkörpers immer größer wird und schließlich unendlich groß werden kann. Das Auftreten solcher Bahnen ist von dem Achsenverhältnisse 0,55 an (das einer Exzentrizität des Meridianschnitts 0.834 entspricht) möglich. Die in Abb. 15 dargestellte Bahn entspricht einem Achsenverhältnisse von 0,26 (Exzentrizität 0,965). Was nun die Theorie B. LINDBLADs vor der S. CHANDRASEKHARs auszeichnet, ist ihr wesentlich kosmogonischer Charakter. Die Serie der elliptischen Nebel mit wachsender Abplattung wird von ihm als eine stetige Entwicklung eines Systems, dessen Dichte ständig zunimmt, aufgefaßt. Bei dem obenerwähnten kritischen Achsenverhältnisse tritt dann die Instabilität ein, und es erfolgt eine Ausströmung in den Außenraum. Nach dieser Auffassung stellen die Spiralarme, wenigstens

---

[15]) Die neuesten Darstellungen dieser Theorie finden sich in Stockh. Obs. Annaler *12*, Nr 4, (1936), Zt. f. Ap. Bd. 15, S. 124 (1937) und Ap. J. vol. 92, p. 1 (1940), (St. Obs. Ann. 14, Nr. 1 (1942) war dem Verfasser noch unzugänglich).

in den Anfangsstadien der Entwicklung, die wirklichen Bahnen der Materie dar (und nicht, wie bei CHANDRASEKHAR die Bahnen von Punkten konstanter Sterndichte); bei den schweren Spiralarmen vollentwickelter Nebel glaubt LINDBLAD eine nahezu kreisförmige Bewegung der einzelnen Elemente annehmen zu dürfen, die aber auf spiralförmigen Kurven verteilt sind. Die Entstehung eines Spiralarmes wird durch die nebenstehende Abb. 16, die ebenfalls einer Abhandlung von LINDBLAD entnommen ist, veranschaulicht. In dem Punkte T, der ursprünglich am Rande des homogenen Rotationsellipsoids in dessen Äquatorialebene liegt, ist eine Instabilität entstanden, und

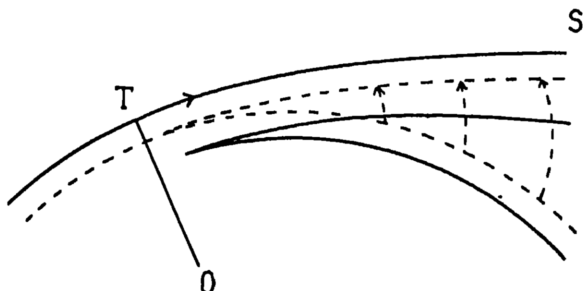


Abb. 16
Entstehung eines Spiralarms, nach B. Lindblad.

ein gewisses Materiequantum durch irgend eine minimale lokale Störung in eine asymptotische spiralförmige Bahn TS gehoben worden. Dieses Element wird wegen des Flächensatzes in bezug auf die noch in Kreisbahnen bewegte Materie, die sich in dem durch den Pfeil angedeuteten Sinne bewegen möge, zurückbleiben. Durch die von ihm auf die übrige Masse ausgeübte Flutwirkung wird immer mehr Materie vom Zentralkörper in der dem ursprünglichen Herde im Sinne der Rotation nachfolgenden Gegend abgebaut und in spiralförmige Bahnen abgelenkt, wie dies durch die punktierten Kurven in der Abbildung angedeutet ist. Unter gewissen, ziemlich speziellen Annahmen läßt sich zeigen, daß diese Störung durch eine FOURIER-Reihe dargestellt werden kann, die nach Vielfachen der doppelten Rotationsgeschwindigkeit ω (die Winkelgeschwindigkeit ω innerhalb des Zentralsystems wird als konstant angenommen, was unter gewissen Voraussetzungen als zulässig erscheint) fortschreitet. Ein möglicher Fall, der durch weitere plausibel erscheinende Annahmen wahrscheinlich gemacht werden kann, ist dann der, daß der jeweilige «Herd» mit derselben Geschwindigkeit in der Äquatorebene relativ zu dem ursprünglichen Herde zurückläuft, mit der sich letzterer um den Mittelpunkt dreht, und daß die Wirkung der Störung im wesentlichen durch das zweite, dem Werte $n = 2$ entsprechende Glied der obenerwähnten Entwicklung dargestellt wird. In diesem Falle ist der jeweilige

Herd der Ausströmung im Raume unbeweglich, und da die Störung in Phase mit der Eigenschwingung des Systems ist, bildet sich gegenüber dem ersten Herde ein zweiter aus, wodurch die Polarität der beiden Hauptäste in den Spiralnebeln erklärt werden kann. Durch weitere Annahmen, die ebenfalls als plausibel betrachtet werden können, wird auch für die sich einer logarithmischen Spirale nähernde Form der Äste eine Erklärung gegeben. Der Hauptnachteil dieser sehr scharfsinnigen Theorie ist wohl in ihrer Uneinheitlichkeit zu erblicken, also in der für sie bestehenden Notwendigkeit, zur Erklärung jeder einzelnen bei den Spiralnebeln beobachteten Eigenschaft eine besondere Gruppe von ad hoc eingeführten, wenn auch meistens nicht unplausiblen Annahmen zu machen. Da die Spiralstruktur augenscheinlich ein Phänomen ist, das nur in zeitlich veränderlichen, nicht-stationären Systemen auftreten kann, ist es, wie S. CHANDRASEKHAR treffend hervorgehoben hat, auch nicht möglich, eine Erklärung dieses Phänomens zu geben, ohne im Besitze einer Theorie der nicht-stationären Zustände zu sein. Wenn B. LINDBLAD dies dennoch, von der Theorie stationärer Systeme ausgehend, zu tun versucht, so wird seine Aufgabe, je mehr sich das betrachtete Gebilde von einem solchen Zustande entfernt, immer schwieriger und zwingt ihn immer mehr zur Einführung zusätzlicher Annahmen, die die Einheitlichkeit der von seiner Theorie entworfenen Bilder beeinträchtigen. Eine gewisse Prüfung ihrer Ergebnisse an der Erfahrung wäre prinzipiell möglich, läßt sich heute aber leider noch nicht durchführen. Sie könnte in dem experimentellen Nachweise bestehen, daß die aus Messungen von Radialgeschwindigkeiten an verschiedenen Punkten eines Spiralnebels bestimmbare Rotationsrichtung wirklich in dem von der Theorie vorausgesagten Sinne erfolgt, d. h. in derselben Richtung, in der man sich um den Mittelpunkt beim Durchlaufen der Spiralwindungen von innen nach außen bewegen würde[16]). Nun läßt sich aber die räumliche Lage der Ebene eines Spiralnebels aus seiner Projektion auf die Bildebene nicht ohne weiteres ablesen, da wir den vorderen Rand des Nebels vom hinteren Rande im allgemeinen nicht unterscheiden können und uns zu seiner Bestimmung nur der in vielen Nebeln bemerkbaren Asymmetrien, und vor allem der häufig auftretenden dunklen Streifen, die als Absorptionsbanden gedeutet werden, bedienen müssen. Die von SLIPHER seinen spektroskopischen Ergebnissen gegebene Deutung würde mit der Forderung der LIND-

[16]) Dieser Drehsinn würde allerdings auch dem Falle $\dot{\Phi} > 0$ der Theorie CHANDRASEKHARS entsprechen und daher noch nicht als Beweis für die Richtigkeit der LINDBLADschen Theorie gewertet werden dürfen. Da aber die erstgenannte Theorie die Bewegungsrichtung ganz offen lässt, indem sie beide Möglichkeiten als zulässig betrachtet, würde eine Übereinstimmung des empirischen Befundes mit der *Voraussage* der Theorie LINDBLADS doch in einem gewissen Sinne mehr zugunsten dieser letzten Theorie sprechen.

BLADschen Theorie nicht in Übereinstimmung sein, jedoch darf sie keineswegs als endgültig betrachtet werden, und LINDBLAD hat sich an Hand einer ganzen Serie von Nebelaufnahmen bemüht, den Beweis zu führen, daß die richtige Deutung der dunklen Absorptionsstreifen in den Nebeln den von seiner Theorie verlangten Rotationssinn für diese Nebel ergibt. Eine einwandfreie und unzweideutige Beantwortung dieser Frage nach dem wahren Rotationssinne der Spiralnebel stellt eines der dringendsten Erfordernisse für eine fruchtbare Weiterentwicklung ihrer Theorie dar[17]).

In den Ausführungen der beiden letzten Abschnitte (Gabelung in der Sequenz der Außergalaktischen Nebel und Spiralenphänomen) haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die betrachteten Gebilde wirklich aus einzelnen Sternen bestehende Systeme sind, so daß die im I. Teil dieses Buches dargelegte Theorie des «Sterngases» auf sie angewandt werden kann. Die beobachteten Formen der elliptischen und Spiralnebel erwiesen sich mit den Grundlagen dieser Theorie als durchaus verträglich, und es ist uns sogar gelungen, gewisse unter Umständen instabile Übergangsformen zu finden, die auch die mit der Theorie an sich nicht unmittelbar verbundene kosmogonische Anschauung zu bestätigen scheinen, daß die in Abb. 12 dargestellte Serie dieser Formen dem Entwicklungsgange der Sternsysteme entspricht. Es darf jedoch hierbei nicht übersehen werden, daß die Sequenz dieser Formen noch von einer anderen Seite eine Erklärung gefunden hat, und zwar durch die grundlegenden Arbeiten von J. H. JEANS[18]) über die Gestalten rotierender kompressibler Flüssigkeiten (Gasmassen). Nach den von diesem Forscher erreichten Ergebnissen durchläuft eine rotierende Gasmasse, bei zunehmender Rotationsgeschwindigkeit, oder richtiger des Verhältnisses $\frac{\omega^2}{4\pi\varkappa^2\overline{\varrho}}$, wo ω die Winkelgeschwindigkeit und $\overline{\varrho}$ die mittlere Dichte bedeutet, eine Serie von Gleichgewichtsfiguren, von der Kugel bis zu einer gewissen «pseude-sphäroidischen» Figur, die durch eine an ihrem Äquator auftretende scharfe Kante ausgezeichnet ist. Bei noch weiterem Anwachsen des erwähnten Verhältnisses entsteht an dieser Kante eine Instabilität, die das Ausströmen des Gases in der Äquatorebene zur Folge hat. Wenn die Kompressibilität der gasförmigen Materie nicht unbeschränkt groß angenommen wird, kann das Gebilde durch eine Gasmasse mit inkompressiblem Kerne (das verallgemeinerte Modell von ROCHE) approximiert werden, und da nun dieser Kern auch die Form eines dreiachsigen (JACOBIschen) Ellipsoids annehmen kann, werden auch in der Äquatorebene der Gasmasse Instabilitätsstellen möglich,

---

[17]) Die neuesten Ergebnisse von HUBBLE und MAYALL scheinen die SLIPHERsche Auffassung zu bestätigen. (Während des Druckes hinzugefügt).

[18]) J. H. JEANS, Problems of Cosmogony (Cambridge 1919) und Astronomy and Cosmogony (Cambridge 1929).

die sich durch das Auftreten zweier zueinander polarer Spitzen äußern können, aus denen dann bei weiterer Steigerung der Rotation spiralförmige Arme ausströmen müssen. Es ist auf diese Weise J. H. JEANS gelungen, viele der bei Außergalaktischen Nebeln auftretenden Formen (bis auf die Ähnlichkeit der Spiralarme mit logarithmischen Spiralen) zu deuten, wobei zu beachten ist, daß sich die von ihm gegebenen Deutungen nicht ohne weiteres auf Sternsysteme übertragen lassen, da sie durch die Annahme eines Gasdruckes im wahren Sinne des Wortes, also einer Kraftübertragung von einem Teile auf einen anderen, in Verbindung mit einer im Vergleiche zu den Ausmaßen der Systeme kleinen freien Weglänge, wesentlich bedingt sind. Daß die äußeren Teile der großen spiralförmigen und unregelmäßigen Außergalaktischen Nebel aus Sternen bestehen, können wir zwar nicht bezweifeln, da letztere auf den modernen, mit den großen Reflektoren erhaltenen photographischen Aufnahmen dieser Objekte direkt erkennbar sind; die Kerne aber dieser Nebel sowie alle elliptischen Nebel zeigen bis jetzt noch keine Spur von Sternen, und wenn dies auch nicht als Beweis dafür betrachtet werden kann, daß sie nicht auch aus Sternen gebildet sind, ist die Möglichkeit einer gasförmigen Zusammensetzung bei diesen Gebilden nicht von der Hand zu weisen. Dann würden wir in den Außergalaktischen Nebeln die Geburtsstätten der Sterne vor uns haben, worauf auch der bei der Zusammenstellung ihrer empirisch ermittelten Eigenschaften auf S. 154 unter 2. und 3. hervorgehobene Übergang zu «früheren» Spektraltypen und bläulicherer Färbung bei den «späteren» Klassen der Nebel, die als Anzeichen für das erstmalige Erscheinen blauer Riesensterne gedeutet werden könnte, hinzuweisen scheint. In diesem Falle wären die Formen der Außergalaktischen Nebel *kosmogonisch* aus der Theorie der rotierenden Gasmassen und nicht auf Grund einer Entwicklung von Sternsystemen zu erklären. Die Vermutung, daß beide Theorien in ihren Ergebnissen weitgehend parallel laufen könnten, wird durch die Tatsache nahegelegt, daß die JEANSschen Rechnungen auf eine Grenzfigur in der Reihe der Elliptischen Nebel führen, die ein Achsenverhältnis von annähernd 1/3 aufweist und eine große Ähnlichkeit mit den Nebeln der Klasse *E7* (oder *E6*) zeigt. Es erscheint schließlich auch nicht ausgeschlossen, daß die Außergalaktischen Nebel in einigen ihrer Teile aus Gas, in anderen schon aus völlig ausgebildeten Sternen bestehen könnten oder eventuell aus einem Gemisch von beiden, so daß ihre vollständige Erklärung nur von einer Verbindung der JEANSschen und der hier geschilderten Theorie erwartet werden dürfte[19]).

---

[19]) Eine umfangreiche theoretische Untersuchung von F. HOYLE (Monthly Notices *105*, Nr. 5, p. 287, 1945), die dem Verfasser erst während der Drucklegung dieses Buches zugänglich geworden ist, und deren zwei letzte Abschnitte noch nicht erschienen sind, versucht von diesem Stand-

Untersysteme und Übersysteme. Kosmologie

In diesem letzten Abschnitte sollen einige Fragen gestreift werden, deren ausführliche Behandlung heute in einer Einführung in die Dynamik der Sternsysteme noch verfrüht erscheinen könnte, die aber bei der Weiterentwicklung dieser Disziplin zweifellos nicht mehr lange außer acht gelassen werden können. Diese Fragen beziehen sich einerseits auf eine Verfeinerung der oben gegebenen Theorie durch eine angemessene Berücksichtigung der zwischen den Sternen in einigen besonders kompakten Systemen zweifellos stattfindenden Wechselwirkungen, andererseits auf die von ganzen Sternsystemen oder Teilen von solchen aufeinander gegenseitig ausgeübten Wirkungen. Schließlich sollen auch den modernen Bestrebungen, das ganze Weltall als ein einziges «System» aufzufassen, ein paar Worte gewidmet werden. Was die Berücksichtigung der Sternbegegnungen betrifft, so haben wir schon auf S. 38 gesehen, daß sie nach dem Vorbilde der BOLTZMANNschen Grundgleichung der Gastheorie, von C.V.L. CHARLIER, durch Hinzunahme einer sog. «Passagenfunktion», ∇f auf der rechten Seite der Grundgleichung (60) in Rechnung gestellt worden sind. Über die Form dieser Funktion, die CHARLIER (Lund Medd., Ser. II, Nr. 16, 1917) für den Fall sich nach dem NEWTONschen Gesetze anziehender Körper ausführlich begründet hat, wollen wir uns hier nicht ausbreiten, da wir mit ihr nicht zu rechnen beabsichtigen und verweisen wegen alles Näheren auf die eben zitierte Originalabhandlung. Für praktische Zwecke genügt es, zu erwähnen, daß nach einer von O. HECKMANN und H. SIEDENTOPF[20]) ausgeführten Abschätzung, die Vernachlässigung der Begegnungen erst bei den von ihnen für die Mitte eines typischen Kugelhaufens, die sie durch eine räumliche Dichte von etwa 600 Sternen der Sonnenmasse im Kubikparsec und eine mittlere Geschwindigkeit von etwa 10 km/sec charakterisieren, angenommenen Verhältnisse unzulässig zu werden anfängt. In allerneuester Zeit haben S. CHANDRASEKHAR und J. v. NEUMANN[21]) die Frage der Schwankungen der auf einen Stern in einem Sternsystem wirkenden Kraft, unter dem Einflusse der sich ändernden zufälligen Konstellation seiner Umgebung einer erneuten statistischen Untersuchung

---

punkte aus auf den Entstehungsprozeß der Spiralnebel sowie der Sterne neues Licht zu werfen. Nach HOYLE ist der größte Teil der Masse eines Spiralnebels nicht in seinen Sternen, sondern in der in ihm etwas verdichteten interstellaren Wolke enthalten. Die hellen Sterne entstehen längs einem Durchmesser des Nebels und bleiben in dessen äußeren Teilen, wenn die Rotationsgeschwindigkeit mit wachsender Entfernung vom Mittelpunkte langsam abnimmt, hinter den inneren Teilen zurück, wodurch ein spiralförmiges Gebilde erzeugt wird. (Während des Druckes hinzugefügt.)

[20]) Zur Dynamik kugelförmiger Sternhaufen, Zt. f. Ap. Bd. 1, S. 67, (1930).

[21]) Statistics of the Gravitational Field arising from a Random Distribution of Stars, Ap. J. 95, 489, 1942 und 97, 1, 1943.

unterzogen und Formeln für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Kraft vom Betrage F als Funktion der mittleren Masse und Dichte der «Feldsterne», unter der einzigen Voraussetzung der Konstanz dieser mittleren Sterndichte abgeleitet. Sie haben sich ferner die Frage nach der mittleren Lebensdauer einer zufälligen Schwankung des Kraftfeldes vorgelegt und einen Ausdruck auch für $\frac{dF}{dt}$ als Funktion der mittleren Sternmasse, räumlichen Sterndichte und Geschwindigkeit der Feldsterne erhalten, mit dessen Hilfe die oben erwähnte Lebensdauer einer Störung berechnet werden kann. Ein weiteres Ergebnis dieser statistischen Theorie war die Entdeckung einer neuen Erscheinung, die die genannten Autoren als «dynamische Reibung» bezeichnen, weil sie in einer systematischen «Deceleration» in Richtung der Bewegung des Sternes besteht[22]). Die Einschätzung der Bedeutung dieses Phänomens sowie des Anwendungsbereiches der neuen Theorie muß der Zukunft überlassen werden.

Die kugelförmigen Sternhaufen bieten nicht nur die Gelegenheit zur Anwendung der durch die Berücksichtigung der Sternbegegnungen erweiterten dynamischen Theorie der Sternsysteme, sondern stellen auch lehrreiche Beispiele von «Untersystemen» dar, womit wir zu dem zweiten der obenerwähnten Fragenkomplexe hinübergeführt werden. Man hat nämlich bei dem Versuche, einer Theorie dieser Gebilde, unter der Voraussetzung, daß sie abgeschlossene im stationären Zustande befindliche mechanische Systeme sind, die Erfahrung machen müssen, daß es für einen aus einer endlichen Anzahl von Sternen bestehenden Sternhaufen einen solchen Zustand praktisch nicht gibt; denn unter dem Einflusse des durch Sternbegegnungen bewirkten Energieaustausches muß ein solcher Haufen dem absolut stabilen Zustande des thermodynamischen Gleichgewichts zustreben, den er nur bei unendlich kleiner Dichte erreichen kann, weil die isotherme Gaskugel unendlichen Radius und bei endlicher Dichte auch unendlich große Masse hat. Es ist daher, wohl zuerst von v. Zeipel, für die sog. offenen Haufen, die Vermutung ausgesprochen worden, daß die Sternhaufen nicht als abgeschlossene, sondern mit ihrer Umgebung in Wechselwirkung stehende Systeme betrachtet werden müssen, in dem Sinne, daß die aus ihnen entweichenden Sterne durch eine gleiche Anzahl von aus ihrer Umgebung in sie eintretenden Sternen ersetzt werden, so daß das ganze Gebilde in einem stationären Zustande verweilt. Andere Forscher haben die Stationarität der Kugelhaufen auf verschiedene andere Weisen zu begründen versucht, so A. Martens[23]) durch Ein-

---

[22]) S. Chandrasekhar, Ap. J. *97*, 255, 266. Die in den Fußnoten 21) und 22) erwähnten Arbeiten waren dem Verfasser im Original noch nicht zugänglich.

[23]) A. Martens, A Research on the Spherical Dynamical Equilibrium Distribution of Stars of Unequal Masses, Göteborg, 1928.

betten eines aus Sternen großer Masse bestehenden Kugelhaufens in ein «Feld» von Sternen geringerer Masse, oder O. HECKMANN und H. SIEDENTOPF[24]) durch eine Abänderung des NEWTONschen Gravitationsgesetzes im Sinne der Einführung des EINSTEINschen kosmologischen Zusatzgliedes. Wir wollen uns aber an dieser Stelle mit der Theorie der Kugelhaufen, (die übrigens in der oben geschilderten Theorie S. CHANDRASEKHARS, insofern man seine drei Grundannahmen — s. S. 157 ff. — gelten läßt, enthalten ist und von ihm sowohl für stationäre, wie auch für nichtstationäre Fälle ausführlich entwickelt worden ist), nicht weiter beschäftigen, weil die Prüfung der Ergebnisse an der Erfahrung gerade bei den Kugelhaufen auf besonders große Schwierigkeiten stößt, und man wohl sagen kann, daß alle Autoren, die von den verschiedensten Standpunkten aus an dieses Problem herangetreten sind, eine Übereinstimmung ihrer Ergebnisse mit den empirischen Befunden erzielt zu haben glauben. Solange uns in den Sternhaufen nur die räumliche Verteilung der allerhellsten Sterne einigermaßen bekannt ist und über die Geschwindigkeiten dieser Sterne so gut wie nichts ausgesagt werden kann, muß jeder Versuch einer theoretischen Deutung weitgehend von rein subjektiven Empfindungen abhängig bleiben, und es darf vor allem die den meisten Theorien zugrunde liegende, eingestandenermaßen aus rein mathematischen Erwägungen eingeführte, zur Vereinfachung der Überlegungen dienende Annahme, daß sich diese Gebilde in einem stationären Zustande oder gar in dynamischem Gleichgewichte befinden, füglich bezweifelt werden.

Die Betrachtung der dynamischen Erscheinungen, die bei der *Begegnung zweier Sternsysteme* beobachtet werden, seien es nun zwei Untersysteme unseres Galaktischen Systems oder zwei einem Übersystem angehörende Außergalaktische Nebel, führt zu der Aufstellung neuer dynamischer Probleme, deren Lösung heute noch kaum in Angriff genommen worden ist. Solche Begegnungen müssen in den großen Ansammlungen Außergalaktischer Nebel, wie die bekannten Gruppen in den Sternbildern Coma-Virgo und andere, wegen der beträchtlich größeren räumlichen Ausdehnung der einzelnen Individuen im Vergleiche zu den sie trennenden Entfernungen, gegenüber den in einem Sternsystem herrschenden Bedingungen, verhältnismäßig viel häufiger vorkommen als bei den Sternen, jedoch ist experimentell außer einigen Aufnahmen, auf denen zwei Nebel nebeneinander sichtbar sind, die vermutlich gerade eine Begegnung erleiden, über diese Ereignisse zunächst natürlich nichts zu erfahren. Dagegen sind einige theoretische Aspekte des Problems der Begegnung von Sternen mit sog. «Bewegten Sternhaufen» oder «Lokalen Sternströmen», wie der Ursa Major-Strom und andere, sowie der «Verschmelzung» sich gegenseitig durchdringender loser (offener) Sternhaufen und ihrer Auflösung durch Begegnungen mit Feldsternen und durch

---

24) l. c.

das allgemeine Gravitationsfeld der Milchstraße vor allem von J. H. JEANS[25]), J. BOK[26]) und anderen studiert worden. Ein wichtiges, bei solchen Betrachtungen oft nützliches Theorem ist der *Jacobi-Poincarésche Satz,* dessen Ableitung in der ihr von A. S. EDDINGTON gegebenen besonders einfachen Form hier noch mitgeteilt werden möge.

Es sei ein Sternsystem gegeben, in dessen Schwerpunkte wir uns ein mit letzterem mitbewegtes cartesisches Koordinatensystem konstruiert denken. Die Koordinaten eines Haufensternes seien in diesem Systeme x, y, z die Komponenten der auf ihn wirkenden, von den anderen Sternen des Haufens ausgehenden Kraft seien X, Y, Z und die Masse des Sternes m. Wir bezeichnen ferner die gesamte, auf den Schwerpunkt bezogene kinetische Energie der Bewegungen aller Haufensterne mit T, das gesamte Trägheitsmoment des Systems mit J und die potentielle Energie, die wir uns in der Weise normiert denken, daß sie bei Zerstreuung aller Haufensterne ins Unendliche den Wert Null erhält, mit W. Die Bewegungsgleichungen eines einzelnen Sternes sind dann

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X; \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y; \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z. \tag{1}$$

Wir betrachten nun die Identität

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(x^2) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{2}$$

deren Richtigkeit leicht nachzuprüfen ist, und die mit ½ m multipliziert die Form annimmt

$$\frac{1}{4}m\frac{d^2}{dt^2}(x^2) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}xX, \tag{3}$$

wobei natürlich auch zwei entsprechende Ausdrücke für y und z gelten. Addieren wir diese drei Ausdrücke zusammen und summieren über alle Sterne des Systems, so ergibt sich

$$\frac{1}{4}\sum m\frac{d^2}{dt^2}(r^2) = \frac{1}{2}\sum mv^2 + \frac{1}{2}\sum(xX + yY + zZ), \tag{4}$$

wo $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ gesetzt worden ist. Das zweite Glied auf der rechten Seite ist hier der Ausdruck, dem CLAUSIUS die Bezeichnung «*Virial*» gegeben hat, während die linke Seite unter Benutzung der Bezeichnung für das Trägheitsmoment J des Systems, in der Form

$$\frac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}\sum(mr^2) = \frac{1}{4}\frac{d^2J}{dt^2} \tag{5}$$

geschrieben werden kann. Da sich das Trägheitsmoment in einem stationä-

---

25) Astronomy and Cosmogony, S. 374.

26) Harvard Circular, Nr. 384 (1934).

ren Systeme natürlich nicht ändern darf, ist die linke Seite von (4) ständig gleich Null, und wir haben somit für ein solches System

$$T = -\frac{1}{2}\sum(xX + yY + zZ), \tag{6}$$

so daß die gesamte kinetische Energie T einfach durch Ausrechnung des Virials erhalten werden kann. Da nun die Kräfte ausschließlich von der gegenseitigen NEWTONschen Anziehung der Sterne herrühren, und in (6) über alle Sterne summiert werden muß, wird einem, von der Anziehung eines Sternes m_1 auf einen Stern m_2 herrührenden Gliede

$$-\frac{1}{2}x_2\frac{\varkappa^2 m_1 m_2 (x_2 - x_1)}{r_{12}^3} - \frac{1}{2}y_2\frac{\varkappa^2 m_1 m_2 (y_2 - y_1)}{r_{12}^3} - \frac{1}{2}z_2\frac{\varkappa^2 m_1 m_2 (z_2 - z_1)}{r_{12}^3}$$

immer ein von der Anziehung des Sternes m_2 auf den Stern m_1 herrührendes Glied

$$-\frac{1}{2}x_1\frac{\varkappa^2 m_1 m_2 (x_1 - x_2)}{r_{12}^3} - \frac{1}{2}y_1\frac{\varkappa^2 m_1 m_2 (y_1 - y_2)}{r_{12}^3} - \frac{1}{2}z_1\frac{\varkappa^2 m_1 m_2 (z_1 - z_2)}{r_{12}^3}$$

entsprechen, wo $r_{12} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ die Entfernung beider Sterne voneinander bedeutet. Indem wir beide Ausdrücke zusammen addieren erhalten wir

$$-\frac{1}{2}\frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{r_{12}},$$

und es ist daher

$$-\frac{1}{2}\sum(xX + yY + zZ) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}\frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{r_{12}}\right\} = -\frac{1}{2}W, \tag{7}$$

wo die Summe über alle Kombinationen der vorhandenen Sterne zu Paaren erstreckt werden muß; sie ist aber dann nichts anderes als die potentielle Energie W des Systems, mit umgekehrtem Vorzeichen. Durch Einsetzen des Ausdruckes (7) in (6) erhalten wir nun

$$2T + W = 0 \tag{8}$$

Der durch diese Beziehung ausgedrückte JACOBI-POINCARÉsche Satz lautet demnach: *In einem im stationären Zustande befindlichen Sternsysteme ist der absolute Betrag der (stets negativen) potentiellen Energie gleich der doppelten kinetischen Energie.*

Nun besagt aber andererseits der Energiesatz, daß die Summe von kinetischer und potentieller Energie einen konstanten Wert h behalten muß, also

$$T + W = h.$$

Kombinieren wir diesen Ausdruck mit (8), so erhalten wir, durch Ausrechnung von T und W, noch die beiden weiteren, für ein stationäres System

geltenden Sätze: *Die potentielle Energie ist gleich der doppelten Gesamtenergie* und *Die kinetische Energie ist gleich der Gesamtenergie mit umgekehrtem Vorzeichen.*

Um den Gebrauch dieses Satzes zu veranschaulichen, wollen wir ihn auf die Lösung der Frage nach der Volumenänderung bei einer Verschmelzung mehrerer selbständiger Sternhaufen anwenden. Es bezeichnen T_i und W_i die wie früher definierten kinetische und potentielle Energie des einzelnen Sternhaufens, und $\mathfrak{T}_i$ seine Translationsenergie in bezug auf den gemeinsamen Schwerpunkt aller Haufen, zu einer Zeit, als sie sich noch alle sehr weit voneinander befinden. Die kinetische und potentielle Energie des «Gemisches», bezogen auf diesen gemeinsamen Schwerpunkt, wollen wir mit T_0 und W_0 bezeichnen. Dann gilt ursprünglich für jeden Haufen

$$2\,T_i + W_i = 0\,, \tag{9}$$

und, nach eingetretener Vermischung, wenn der Zustand wieder ein stationärer geworden ist

$$2T_0 + W_0 = 0\ . \tag{10}$$

Andererseits folgt aus dem auf die Gesamtheit der Haufen angewandten Energiesatze

$$\sum(T_i + W_i + \mathfrak{T}_i) = T_0 + W_0. \tag{11}$$

Durch Auflösung nach W_0 und Elimination aller T_i mit Hilfe von (9) und (10) ergibt sich

$$W_0 = \sum W_i + 2\sum \mathfrak{T}_i\,. \tag{12}$$

Bei der Verschmelzung wird also ein Energiebetrag, der gleich dem doppelten der Translationsenergie aller beteiligten Haufen ist, in potentielle Energie umgesetzt und daher zur Expansion des resultierenden Haufens gegen dessen eigene Gravitationsenergie verwendet. Diese Expansion kann, schon bei mäßigen Translationsenergien $\mathfrak{T}_i$ eine sehr beträchtliche sein, und wir sehen daher, daß aus der Vereinigung einer Anzahl kleinerer Systeme ein ungeheuer viel größeres Sternsystem entstehen kann. Man hat hierin mitunter eine Erklärung für die Entstehung unseres Milchstraßensystems sehen wollen, jedoch reicht hierzu eine so einfache Energiebilanz-Überlegung augenscheinlich nicht aus, und es müßten noch verschiedene Zusatzhypothesen hinzukommen, um die eigenartige Struktur der Galaxie, ihre sehr starke Abplattung, ihre im allgemeinen achsensymmetrische Gestalt usw. verständlich zu machen.

Die Bekanntschaft mit immer ausgedehnteren Systemen, von unserem Planetensystem anfangend bis zu den aus Außergalaktischen Nebeln gebildeten «Hypersystemen», die die unaufhaltsam fortschreitende Erforschung

des Weltraumes mit sich gebracht hat, in Verbindung mit dem dem menschlichen Geiste innewohnenden unausrottbaren Triebe zur Synthese, hat seit geraumer Zeit auch die von der empirischen Wissenschaft ausgehenden Forscher veranlaßt, ihre Ergebnisse durch kühne Extrapolationen weit über die Grenzen der tatsächlichen Erfahrung, ja auf das gesamte materielle Weltall auszudehnen. Wenn solche Spekulationen auf den ersten Blick auch als «phantastisch» vorkommen können, so darf nicht übersehen werden, daß sie doch durch gewisse, durchaus berechtigte erkenntnistheoretische Bedürfnisse veranlaßt worden sind, insbesondere durch die der Vorstellung vom *leeren* Raume innewohnenden Schwierigkeiten. So läßt sich schon auf einer sehr frühen Stufe der wissenschaftlichen Entwicklung die Tendenz feststellen, den ganzen, nicht nur experimentell zugänglichen, sondern theoretisch verfügbaren Raum ebenso dicht mit Materie auszufüllen, wie wir ihn in unserer Umgebung ausgefüllt sehen, und da an der Unendlichkeit dieses Raumes bis vor kurzem kein Zweifel erlaubt zu sein schien, folgte hieraus zwangsläufig, daß auch die «Masse der Welt» unendlich groß angesetzt werden müsse. Diesen Bestrebungen schien auch keine unüberwindliche Schwierigkeit entgegenzustehen, so lange man über keine scharf definierte Dynamik verfügte, an der die Möglichkeit einer unendlich ausgedehnten, unendlich massiven Welt geprüft werden konnte. Eine radikale Änderung wurde in diese Verhältnisse erst durch die Aufstellung der NEWTONschen Dynamik hineingetragen, und namentlich durch die Erkenntnis des NEWTONschen Gravitationsgesetzes, das zwar zunächst in keinem logischen Zusammenhange mit dieser Dynamik stand, sich jedoch als ein das Verhalten aller Materie beherrschendes Prinzip sofort aufdrängte. Nun entstand für die *«Kosmologie»*, wie die Spekulation über den Aufbau des Weltalls genannt wurde, ein eigentümliches Dilemma: wenn in einem unendlichen (oder bloß hinreichend großen) Raume eine endliche Menge von gravitierender Materie untergebracht wurde, so daß sie von materiefreiem Raume umgeben erschien, mußte sie, falls sie als anfänglich ruhend gedacht wurde, unvermeidlich zusammensacken (das Argument von HALLEY für den unendlichen Raum mit unendlich ausgebreiteter Materie); andererseits zeigte eine allerdings erst im XIX. Jahrhundert (von H. v. SEELIGER und C. NEUMANN) angestellte Überlegung, daß die Vorstellung eines unendlichen mit nach dem NEWTONschen Gesetze gravitierender Materie endlicher Dichte erfüllten Raumes zu unüberwindlichen Widersprüchen führt. Das NEWTONsche Potential eines solchen Gebildes in irgend einem seiner Punkte wird nämlich durch den Ausdruck

$$\lim_{V \sim \infty} \varkappa^2 \int \frac{\varrho \, dV}{r}$$

gegeben, in dem r der Abstand irgend eines anderen Punktes von dem be-

trachteten bedeutet, ϱ die räumliche Dichte der Materie in diesem zweiten Punkte und dV das Volumenelement, wobei zur Grenze $V=\infty$ übergegangen werden muß. Das Postulat, daß die mittlere Dichte $\bar{\varrho}$ einen nicht-verschwindenden Wert haben soll, besagt, daß das Verhältnis der in einem beliebig abgegrenzten Volumen V enthaltenen Masse M_v zu diesem Volumen, bei unendlichem Anwachsen von V, einem endlichen Werte zustrebt. Abgesehen von der von SEELIGER und NEUMANN aufgedeckten Vieldeutigkeit des obenstehenden Ausdruckes, je nach der Art, in der dieser Grenzübergang ausgeführt wird, ist sofort einzusehen, daß z. B. schon bei einem konstanten, auch noch so kleinen Werte von ϱ nicht nur das Potential, sondern auch seine Derivierten, also die auf die Materie wirkenden Kräfte, unendlich große Werte erhalten. Eine Ausfüllung des unendlichen euklidischen Raumes mit unendlich viel nach dem NEWTONschen Gesetze gravitierender Materie mit einer endlichen Dichte erweist sich, unter Voraussetzung eines statischen Zustandes, somit als unmöglich. Aus dieser Sackgasse sind verschiedene Auswege gesucht worden. Es kann erstens unter Benutzung eines Kunstgriffes die Voraussetzung einer im oben definierten Sinne endlichen Dichte umgangen werden, indem man nach dem Vorbilde von LAMBERT[27]) und insbesondere von CHARLIER[28]) eine «hierarchische» Welt aufbaut, in der jedes System n-ter Ordnung sich aus Untersystemen $(n-1)$-ter Ordnung aufbaut und selbst ein Element eines Übersystems $(n+1)$-ter Ordnung ist, wobei die mittleren Entfernungen aller ein System bildender Elemente, im Vergleiche zu denen in seinen Untersystemen jeweils in einer solchen Weise zunehmen, daß die mittlere Dichte der Materie ständig abnimmt und bei Systemen beliebig hoher Ordnung beliebig kleine Werte erhält. In diesem Falle ist die Dichte der Materie in jedem lokal abgegrenzten Gebiete endlich, die mittlere Dichte im unendlichen Raume trotzdem aber verschwindend, und es erscheint kein Gebiet in diesem Raume vor einem anderen ausgezeichnet. Zweitens kann das NEWTONsche Gravitationsgesetz in verschiedenen Weisen abgeändert werden, jedoch immer so, daß sich für sehr große Entfernungen eine merkliche Abweichung von der invers-quadratischen Abnahme der Anziehungskraft im Sinne einer zusätzlichen Abschwächung ergibt, (so daß die Anziehung schließlich sogar in eine Abstoßung übergehen kann). Drittens kann das Postulat eines *unendlichen* Raumes fallen gelassen werden, was besonders seit der Einführung von gekrümmten Raum-Zeit-Mannigfaltigkeiten durch die allgemeine Relativitätstheorie als ein durchaus gangbarer Weg betrachtet werden muß, aber auch im Rahmen des euklidischen Raumes nicht völlig ausgeschlossen erscheint. Viertens kann, worauf schon WILSING bereits nach dem Erscheinen der ersten, diesem Gegenstande gewidmeten Ar-

---

27) Kosmologische Briefe über die Einrichtung der Welt, (1761).

28) Arkiv för Mathematik, Astronomi och Fysik, *4*, Nr. 24 (1908) und *16*, Nr. 22 (1922).

beiten SEELIGERS hingewiesen hat, auf die Forderung des statischen Zustandes verzichtet und eine sich in Bewegung befindliche «strömende» Welt ins Auge gefaßt werden.

Es kann hier nicht unsere Aufgabe sein, die verschiedenen, in Verfolgung der oben angedeuteten Richtungen im Laufe der letzten Jahrzehnte aufgestellten kosmologischen Theorien durchzunehmen oder auch nur zu skizzieren, zumal der für diese Probleme interessierte Leser eine ebenso klare wie knappe Darstellung des gesamten Fragenkomplexes in der ausgezeichneten Monographie von O. HECKMANN[29]) «Theorien der Kosmologie» finden wird. Es ist bekannt, daß A. EINSTEIN schon 1917 durch Hinzufügung des sog. kosmologischen Gliedes zu seinen Feldgleichungen ein statisches, gleichmäßig mit der Materie angefülltes Weltall konstruieren konnte, das in einem gerade durch diese Materieverteilung bedingten geschlossenen sphärischen oder elliptischen Raume ruht. Diese Lösung, die eine Verbindung des zweiten und dritten der oben angeführten Auswege darstellt, schien zur Zeit ihres Erscheinens vielen Forschern die endgültige Beilegung aller Schwierigkeiten zu bringen, doch hat eine neue und ungeahnte Ausdehnung unserer empirischen Kenntnisse auch auf dem Gebiete der kosmologischen Forschung zu tiefgreifenden Änderungen geführt, und zwar im Sinne einer entschiedenen Neigung zur letzten der von uns aufgezählten Möglichkeiten, nämlich zur Betrachtung eines nicht-statischen Weltalls.

Wenn die Kosmologie ein von den äußersten Grenzen unseres derzeitigen Wissens über den Makrokosmos ausgehender Extrapolationsversuch vom Teile aufs Ganze darstellen soll, so sind ihre Bausteine augenscheinlich in den Außergalaktischen Nebeln zu erblicken, die die wahren Molekeln dieser im Vergleiche zu allen von uns bis jetzt betrachteten, noch einmal ungeheuer erweiterten Gastheorie bilden. Nun zeichnet sich aber dieses neue, die «Metagalaxie» bildende Gas, wenigstens so weit unsere Kenntnisse heute reichen, durch zwei Eigenschaften aus, die wir bis jetzt noch bei keinem der von uns untersuchten weniger ausgedehnten Gebilden angetroffen haben: Die räumliche Verteilung der Außergalaktischen Nebel scheint bis zu den Grenzen der Reichweite der mächtigsten uns heute zur Verfügung stehenden Reflektoren eine praktisch *unveränderliche Dichte* zu zeigen, und das ganze System befindet sich, wenn die in den Spektren der Spiralnebel beobachteten riesigen Rotverschiebungen der Spektrallinien als Doppler-Effekte gedeutet werden dürfen, keineswegs im Zustande (auch nur statistischer) Ruhe, sondern in einem Zustande der *allgemeinen Expansion*, wobei die Expansionsgeschwindigkeit für die entfern-

---

[29]) Theorien der Kosmologie von O. HECKMANN. Fortschritte der Astronomie, herausgegeben von der Astronomischen Gesellschaft durch P. ten Bruggencate, Nr. 2 (1942) (Springer-Verlag, Berlin).

teren Objekte etwa linear mit der Entfernung zunimmt und für die größten für uns noch abschätzbaren Entfernungen den riesigen Betrag von über 10000 km/sec, also $^1/_{30}$ der Lichtgeschwindigkeit, erreicht. Diese beiden, nach unserem heutigen Ermessen weltumspannenden empirischen Tatsachen sind es, die den modernen kosmologischen Theorien ihr Gepräge gegeben haben. Die jeder kosmologischen Betrachtung zugrunde liegende Extrapolation schien am besten durch die Erhebung dieser erstaunlich einfachen Einförmigkeit zum Prinzip oder Grundpostulat ausführbar zu sein. Dieses *Weltpostulat* bildet in der einen oder anderen Form einen wesentlichen Bestandteil aller drei heute vorliegenden Kosmologien, sowohl der «dynamischen» Kosmologie von E. A. MILNE und MC CREA, die möglichst viel von der klassischen Dynamik in die Kosmologie zu übernehmen versucht, als der auf der allgemeinen Relativitätstheorie fußenden «metrischen» Kosmologie des expandierenden Weltalls von A. FRIEDMANN und G. LEMAITRE und der zweiten «kinematischen» Kosmologie von E. A. MILNE, die nur noch vom Weltpostulat und der Forderung der Invarianz gegenüber einer Lorentz-Transformation ausgeht[30]). Das Wesen dieses Postulates besteht in der Forderung, daß die «Welt» so gebaut sein soll, daß jeder mit einem ihrer Elemente (und gleichgültig mit welchem) mitgeführte Beobachter das gleiche Bild von dem Ablaufe des Weltgeschehens, also von der Verteilung und den Geschwindigkeiten aller anderen Außergalaktischen Nebel hat. Über die «Zulässigkeit» dieses Postulates zu streiten wäre müßig; sein Zweck besteht in der Überbrükkung der Lücke, die unvermeidlich zwischen der Teilkenntnis und dem Schlusse aufs Ganze klafft, und seine Motivierung liegt in den oben angeführten empirischen Erkenntnissen. Ein Zwang zu seiner Annahme ist nicht vorhanden, und es erscheint durchaus nicht ausgeschlossen, daß eine Erweiterung dieser Erkenntnisse zu einer Revision und Umänderung des Weltpostulats führen könnte. Wenn wir überhaupt aber Kosmologie treiben wollen, so scheint die Einführung eines über unsere «normale» Dynamik hinausführenden sehr allgemeinen Prinzips zur Erhaltung eines konkreten Bildes unumgänglich zu sein.

Eine ganz andere Frage ist es, ob kosmologische Spekulationen bei dem gegenwärtigen Stande unseres Wissens über den Makrokosmos schon als berechtigt erscheinen. Die «Flucht» der Außergalaktischen Nebel ist ja auch einer anderen «nüchterneren» und weniger phantastischen Erklärung fähig. Nehmen wir an, daß die den uns zugänglichen Raum einnehmende Materie zu einer früheren, etwa 10^9 oder 10^{10} Jahre zurückliegenden Zeit auf einem viel engeren Raume versammelt war, wofür sich auch einige nicht-astrono-

---

30) Die oben angeführten Bezeichnungen zur Charakterisierung der drei Kosmologien sind von O. HECKMANN eingeführt worden.

mische, atomtheoretische Gründe anführen lassen, und daß sie durch eine Explosion unvorstellbarer Heftigkeit auseinander gesprengt worden ist, dann ist zu erwarten, daß die mit den größten Anfangsgeschwindigkeiten herausfliegenden Brocken nach einer langen Zeit auch den längsten Weg vom Explosionsherde zurückgelegt haben werden, und sich daher auch in den größten gegenseitigen Entfernungen voneinander befinden werden. Daß diese Erklärung als die weniger «phantastische» bezeichnet werden kann, zeigt allerdings, wie wenig dieser Begriff für die Annehmbarkeit einer wissenschaftlichen Theorie als Kriterium verwendbar ist. Das für uns übersehbare Explosionsgebiet könnte aber immer noch einen beliebig kleinen Teil des ganzen Weltalls bilden, und wir würden uns dann, indem wir mit den aus ihm gewonnenen Erfahrungen Kosmologie treiben wollten, vielleicht in einem ähnlichen Irrtum befinden, wie Columbus, der da meinte, Indien auf dem Wege über den Atlantischen Ozean erreicht zu haben, als er sich in Wirklichkeit erst auf einer der Ostküste Amerikas vorgelagerten Insel befand.

NAMEN- UND SACHREGISTER